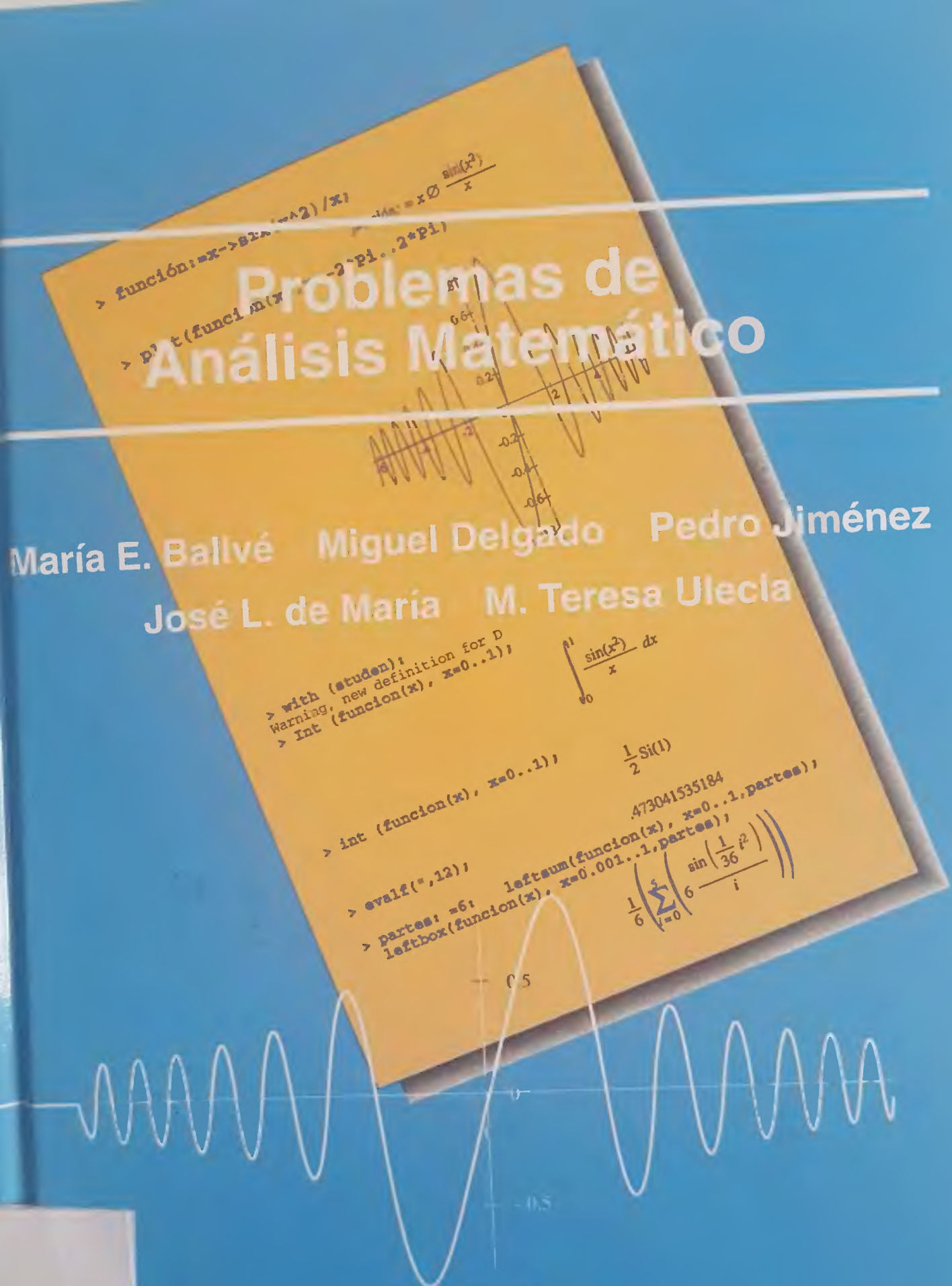
Problemas de Análisis Matemático

María E. Ballvé Miguel Delgado Pedro Jiménez
José L. de María M. Teresa Ulecia



SANZ Y TORRES

Problemas de Análisis Matemático

Primera edición	julio, 1993
Primera reimpresión	septiembre, 1995
Segunda reimpresión	septiembre, 1999
Tercera reimpresión	septiembre, 2001

Problemas de Análisis Matemático

María E. Ballvé
Miguel Delgado
Pedro Jiménez
José L. de María
M.Teresa Ulecia
U.N.E.D.

SANZ Y TORRES

Prólogo

Presentamos un libro de problemas de Análisis Matemático con el cual se ha pretendido completar la colección ejercicios del libro **"Elementos de Análisis Matemático".**

Se tienen que adquirir ciertas técnicas de Cálculo en el aprendizaje del Análisis Matemático que, aunque reiterativas, no dejan de ser esenciales para el desarrollo de las aplicaciones teóricas y prácticas.

Se han remarcado los problemas propuestos en el libro anteriormente mencionado que sirve de guia al que el lector tiene en sus manos.

No se busca originalidad en la exposición sino claridad, en la medida de lo posible, para que el lector no tenga la sensación de estar ante un cúmulo de "ideas felices" sino frente a un texto de trabajo del que pueda ir aprendiendo conforme vaya avanzando.

Esperamos haber cumplido nuestros propósitos de facilitar la tarea del lector y le aconsejamos una lectura lineal de los problemas, previo estudio de la parte teórica correspondiente.

LOS AUTORES

INDICE

Tema 1. Topología de R y Sucesiones.	**1**
Tema 2. Límites de funciones.	**23**
Tema 3. Funciones Continuas.	**39**
Tema 4. Funciones Derivables.	**63**
Tema 5. Fórmula de Taylor y aplicaciones.	**87**
Tema 6. La Integral de Riemann.	**119**
Tema 7. Teoremas Fundamentales del Cálculo Integral.	**127**

Tema 8. Cálculo de Primitivas. 137

Tema 9. Integrales Impropias. 159

Tema 10. Series. 179

Tema 11. Métodos Numéricos del Análisis. 199

Tema 1

Topología de R y Sucesiones

Problema 1

Probar que la intersección arbitraria de conjuntos compactos es un conjunto compacto.

Solución

Sea $\{K_i\}_{i\in I}$ una colección arbitraria de subconjuntos $K_i \subset \mathbf{R}$ compactos.

Al aplicar el teorema de Heine-Borel resulta que cada conjunto compacto K_i es un conjunto cerrado y acotado para todo $i \in I$. Como la intersección de conjuntos cerrados $\bigcap_{i\in I} K_i$ es un conjunto cerrado, basta comprobar que dicha intersección es un conjunto acotado, y es acotado, puesto que está contenido en todo conjunto K_i que es un conjunto acotado. Así pues, al aplicar nuevamente el teorema de Heine-Borel resulta que $\bigcap_{i\in I} K_i$ es un conjunto compacto.

Problema 2

Probar que si $K \subset \mathbf{R}$ es un conjunto compacto, $A \subset \mathbf{R}$ es un conjunto abierto y $C \subset \mathbf{R}$ es un conjunto cerrado, entonces los conjuntos $K \cap C$ y $K-A$ son compactos.

Solución

Por ser K un conjunto compacto, se tiene que K es cerrado y acotado por el teorema de Heine-Borel. Por tanto, $K \cap C$ es un conjunto cerrado, además,

como $K \cap C \subset K$ resulta que $K \cap C$ es acotado, luego, es compacto.

Por otra parte, como el conjunto A es un conjunto abierto, entonces su complementario A^c es un conjunto cerrado. Por definición de diferencia de conjuntos se tiene que

$$K-A=K \cap A^c,$$

y como se expresa como intersección de compacto y cerrado, es un conjunto compacto.

Problema 3

Probar que el conjunto $A=\{x \in \mathbf{R} : 3 \geq x^2 - 1 > 0\}$ no es compacto.

Solución

Inicialmente, expresamos de otra forma el conjunto A:

$$A = \{ x \in \mathbf{R} : x^2 \leq 4 \} \cap \{ x \in \mathbf{R} : x^2 > 1 \} = \{ x \in \mathbf{R} : 1 < |x| \leq 2 \} = [-2,-1) \cup (1,2].$$

Por tanto, A es un conjunto acotado (está contenido en (-3,3)) pero no es un conjunto cerrado (2 es un punto adherente y no pertenece al conjunto A). Así pues, A no es un conjunto compacto;

$$A \neq \overline{A} = [-2,-1] \cup [1,2].$$

Problema 4

Determinar el conjunto interior, el conjunto exterior, el conjunto frontera, la adherencia y el conjunto de los puntos de acumulación del conjunto N (números naturales).

Solución

El interior de N es el conjunto vacío, ya que, si existe algún punto $x \in \mathbf{N}$ que es un punto interior de N, entonces existe un entorno N(x) contenido en N. Esto no es posible, pues según sabemos, en todo entorno de un número natural existen números reales no naturales.

Para determinar el exterior de N utilizamos la igualdad

$$\mathrm{Ext}(\mathbf{N}) = \mathrm{int}(\mathbf{R}-\mathbf{N}).$$

$$\mathrm{Ext}(N) = \mathrm{int}\left((-\infty,1) \bigcup_{n \in N} (n, n+1)\right),$$

y como el conjunto $(-\infty,1) \bigcup_{n \in N} (n, n+1)$ es abierto pues es unión de conjuntos abiertos,

$$\text{Ext}(\mathbf{N}) = (-\infty,1) \bigcup_{n \in N} (n, n+1) = \mathbf{R}\text{-}\mathbf{N}.$$

Se tiene que $\mathbf{R}=\text{int}(\mathbf{N}) \cup \text{ext}(\mathbf{N}) \cup \text{fr}(\mathbf{N})$ y, por tanto,

$$\mathbf{R} = \text{ext}(\mathbf{N}) \cup \text{fr}(\mathbf{N}) = (\mathbf{R}\text{-}\mathbf{N}) \cup \text{fr}(\mathbf{N}),$$

de donde resulta que

$$\text{fr}(\mathbf{N})=\mathbf{R}\text{-}(\mathbf{R}\text{-}\mathbf{N})=\mathbf{N}.$$

$\text{Adh}(\mathbf{N})=\mathbf{N}$ ya que como $\mathbf{R}$-$\mathbf{N}$ es abierto, su complementario $\mathbf{N}=\mathbf{R}\text{-}(\mathbf{R}\text{-}\mathbf{N})$ es cerrado y, por consiguiente, coincide con su adherencia.

El conjunto $\mathbf{N}'$ de los puntos de acumulación de $\mathbf{N}$ es el vacío ya que por ser $\mathbf{N}$ cerrado resulta que $\mathbf{N}' \subset \mathbf{N}$ y, para todo $n \in \mathbf{N}$ se tiene que $N^*(n,1/2) \cap \mathbf{N} = \emptyset$.

Problema 5

Poner un ejemplo de un conjunto A tal que:

a) A sea abierto y tenga tres puntos frontera.

b) A sea cerrado y tenga seis puntos frontera.

Solución

a) Consideremos el conjunto $A = (1,2) \cup (2,3)$. Efectivamente se trata de un conjunto abierto ya que es unión de los conjuntos $(1,2)$ y $(2,3)$ que son conjuntos abiertos, por ser intervalos abiertos.

Por otra parte, $\text{Fr}(A) = \{1,2,3\}$ puesto que: Dado un entorno $N(1)$ del punto 1 existe un $\varepsilon > 0$ tal que $(1-\varepsilon,1+\varepsilon) \subset N(1)$ y, por tanto,

$$N(1) \cap A \neq \emptyset, \text{ ya que } 1+\frac{\varepsilon}{2} \in A \cap (1-\varepsilon,1+\varepsilon),$$

$$N(1) \cap \text{ext}(A) \neq \emptyset \text{ puesto que } 1-\frac{\varepsilon}{2} \in (1-\varepsilon,1+\varepsilon) \text{ y } 1-\varepsilon/2 \notin A.$$

Se razona de forma análoga con los otros puntos.

b) Consideremos por ejemplo el conjunto $A = [-1,0] \cup [1,2] \cup [10,25]$. Evidentemente, se trata de un conjunto que es cerrado por ser unión finita de conjuntos cerrados (intervalos cerrados).

Por otra parte, Fr(A) = {−1,0,1,2,10,25} como puede comprobarse de manera similar a como se hizo en el apartado anterior.

Problema 6

Sea $A \subset \mathbf{R}$ un subconjunto abierto no vacío. Demostrar que el conjunto

$$A - B = \{ x-y : x \in A \text{ e } y \in B \}$$

es un subconjunto abierto de **R** para todo subconjunto no vacío $B \subset \mathbf{R}$.

Solución

Veamos primeramente que para cada número real y, el conjunto

$$A - \{y\} = \{ x-y : x \in A \}$$

es abierto. En efecto, sea $z \in A - \{y\}$, entonces existe un $x \in A$ tal que $z=x-y$. Por ser A un conjunto abierto, existe $\varepsilon>0$ tal que $x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$.

Por tanto, $x - y \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) - \{y\} \subset A - \{y\}$.

Al tener en cuenta que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) - \{y\} = (x-y-\varepsilon, x-y+\varepsilon)$ y que $z=x-y$, resulta que $z \in (z-\varepsilon, z+\varepsilon) - \{y\} \subset A - \{y\}$, por consiguiente, $A - \{y\}$ es un conjunto abierto.

Por otra parte, para todo $B \subset \mathbf{R}$ con $B \neq \emptyset$, se tiene que

$$A - B = \bigcup_{b \in B} (A - \{b\}) ,$$

y por ser $A - \{b\}$ un conjunto abierto para cualquier $b \in B$, se deduce que $A-B$ es un conjunto abierto, por ser unión de conjuntos abiertos.

Problema 7

Sea el conjunto $A=(-\infty,-1] \cup \{0\} \cup (2,3) \cup [5,+\infty)$. Calcular int(A), ext(A), fr(A) y adh(A).

Solución

Probemos primeramente que $\text{int}(A)=(-\infty,-1) \cup (2,3) \cup (5,+\infty)$.

Evidentemente, $(-\infty,-1) \cup (2,3) \cup (5,+\infty)$ es un conjunto abierto por ser unión de intervalos abiertos y esta contenido en el conjunto A, por tanto,

$(-\infty,-1) \cup (2,3) \cup (5,+\infty) \subset \text{int}(A)$ pues int(A) es el mayor conjunto abierto contenido en el conjunto A. Así pues, para demostrar que

$$\text{int}(A)=(-\infty,-1)\cup(2,3)\cup(5,+\infty)$$

basta probar que

$$\text{int}(A)\subset(-\infty,-1)\cup(2,3)\cup(5,+\infty).$$

Veamos que esta última inclusión se cumple. En efecto, si no se cumple, entonces existe un elemento $a\in \text{int}(A)$ tal que $a \notin (-\infty,-1) \cup (2,3) \cup (5,+\infty)$. Como $\text{int}(A)\subset A$ resulta que $a\in\{-1,0,5\}$. Esto es imposible ya que $\{-1,0,5\}\cap\text{int}(A)=\emptyset$, puesto que

$-1\notin \text{int}(A)$ por ser $-1/2\in(-2,0)=(-1-1,-1+1)$,

$-1/2\notin A, 0\notin \text{int}(A)$ por ser $-1/2\in(-1,1)=(0-1,0+1)$,

$-1/2\notin A$, y $5\notin \text{int}(A)$ ya que $4\in(3,7)=(5-2,5+2)$ y $4\notin A$.

Por otra parte, como $A^c = \mathbf{R}-A = (-1,0)\cup(0,2]\cup[3,5)$ y $\text{ext}(A) = \text{int}(A^c)$, al proceder como antes se demuestra que

$$\text{ext}(A) = (-1,0)\cup(0,2)\cup(3,5).$$

Dado que $\mathbf{R} = \text{int}(A) \cup \text{fr}(A) \cup \text{ext}(A)$ y los conjuntos int(A), fr(A) y ext(A) son disjuntos entre sí, resulta que

$$\begin{aligned}\text{fr}(A) &= \mathbf{R} - (\,\text{int}(A)\cup\text{ext}(A)\,) = (\,\text{int}(A)\cup\text{ext}(A)\,)^c = \\ &= [\,(-\infty,-1)\cup(2,3)\cup(5,+\infty)\cup(-1,0)\cup(0,2)\cup(3,5)\,]^c = \\ &= [\,(-\infty,\infty)-\{-1,0,2,3,5\}\,]^c = [\,\{-1,0,2,3,5\}^c\,]^c = \\ &= \{-1,0,2,3,5\}.\end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}\text{adh}(A) &= A\cup\text{fr}(A) = \\ &= (-\infty,-1]\cup\{0\}\cup(2,3)\cup[5,+\infty)\cup\{-1,0,2,3,5\} = \\ &= (-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[2,3]\cup[5,+\infty).\end{aligned}$$

Problema 8

Sea $A=[-8,-5]\cup(-3,0)\cup[1,2)\cup\{3\}\cup[8,+\infty)$. Calcular int(A), ext(A), fr(A), adh(A) y el conjunto A' de los puntos de acumulación de A.

Solución

Int(A) = (-8,-5) ∪ (-3,0) ∪ (1,2) ∪ (8,+∞), ya que este es el mayor abierto contenido en A.

Como A^c =(-∞,-8) ∪ (-5,-3] ∪ [0,1) ∪ [2,3) ∪ (3,8) y ext(A)=int(A^c) resulta que

$$\text{ext}(A) = (-\infty,-8) \cup (-5,-3) \cup (0,1) \cup (2,3) \cup (3,8).$$

Dado que **R**=int(A) ∪ fr(A) ∪ ext(A) y estos tres conjuntos son disjuntos entre sí, resulta que fr(A)=**R**-(int(A) ∪ ext(A)) y, por tanto,

$$\text{fr}(A)=\{-8,-5,-3,0,1,2,3,8\}.$$

$$\text{Adh}(A)= A \cup \text{fr}(A) = [-8,-5] \cup [-3,0] \cup [1,2] \cup \{3\} \cup [8,+\infty).$$

Como los puntos de acumulación de un conjunto son puntos adherentes al mismo tales que cualquier entorno reducido de ellos tiene intersección no vacia con el conjunto, en este caso se tiene que

$$A' = \text{adh}(A) - \{3\} = [-8,-5] \cup [-3,0] \cup [1,2] \cup [8,+\infty),$$

ya que (2,8)-{3} es un entorno reducido del punto 3 y ((2,8)-{3})∩A=∅.

Problema 9

Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_n \dfrac{3n^2+2}{5n-1}$.

b) $\lim_n \dfrac{2n^3-5n-2}{-n^3-n^2+2n+1}$.

c) $\lim_n \dfrac{3n^2-2n+3}{n^5+2n^4-n^2+1}$.

d) $\lim_n \dfrac{\sqrt{n^2+3}-\sqrt{n^2+5}}{\sqrt{n^2+3}+\sqrt{n^2+5}}$.

e) $\lim_n (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n})$.

Solución

a) Al aplicar las propiedades algebraicas de los límites aparece la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. En este caso, esta indeterminación se reduce al dividir el numerador y el denominador del termino general por n^2. Resulta que

$$\lim_n \frac{3n^2+2}{5n-1} = \lim_n \frac{3+\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}},$$

y al tener en cuenta que

$$\lim_n \frac{2}{n^2} = 2\lim_n \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = 0 \text{ , } \lim_n \frac{5}{n} = 0 \text{ y } \lim_n \frac{1}{n^2} = 0 \text{ ,}$$

se tiene que

$$\lim_n \frac{3n^2+2}{5n-1} = \lim_n \frac{3+\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n}-\frac{1}{n^2}} \overset{\text{abuso notacional}}{=} \frac{3+0}{0-0} = \frac{3}{0} = +\infty \text{ .}$$

b) Al aplicar las propiedades algebraicas de los límites aparece la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. En este caso también, esta indeterminación se reduce al dividir el numerador y el denominador del termino general por n^3 y proceder como en el apartado anterior.

$$\lim_n \frac{2n^3 - 5n - 2}{-n^3 - n^2 + 2n + 1} = \lim_n \frac{2 - \frac{5}{n^2} - \frac{2}{n^3}}{-1 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}} = -2 .$$

c) Al igual que en los apartados anteriores se procede como sigue.

Se tiene que

$$\lim_n \frac{3n^2 - 2n + 3}{n^5 + 2n^4 - n^2 + 1} = \lim_n \frac{\frac{3}{n^3} - \frac{2}{n^4} + \frac{3}{n^5}}{1 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3} + \frac{1}{n^5}} = 0 .$$

d) Al aplicar las propiedades algebraicas de los límites aparece la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. En este caso, esta indeterminación se reduce al dividir el numerador y el denominador del termino general por n.

$$\lim_n \frac{\sqrt{n^2+3} - \sqrt{n^2+5}}{\sqrt{n^2+3} + \sqrt{n^2+5}} = \lim_n \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} - \sqrt{1 + \frac{5}{n^2}}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{5}{n^2}}} = \frac{0}{2} = 0 .$$

e) Al aplicar las propiedades algebraicas de los límites aparece la indeterminación $\infty - \infty$. En este caso, esta indeterminación se reduce al multiplicar y dividir la expresión conjugada del termino general.

$$\lim_n (\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n}) = \lim_n \frac{(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n})\ (\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n}} =$$

$$= \lim_n \frac{n^2+1-n}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}} = \lim_n \frac{1-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4}}+\sqrt{\frac{1}{n^3}}} \overset{\text{abuso notacional}}{=} \frac{1}{0} = +\infty \ .$$

Problema 10

Calcular $\lim_n \frac{n!}{n^n}$.

Solución

Como $n! = n(n-1)\ldots 2.1$, para todo n>2 se tiene que

$$n! = n(n-1)\ldots 2.1 < n.n.\ldots.n.2.1 = n^{n-2}\cdot 2,$$

y por tanto

$$\frac{n!}{n^n} \leq \frac{2\cdot n^{n-2}}{n^n} = \frac{2}{n^2}.$$

Luego

$$\lim_n \frac{n!}{n^n} \leq \lim_n \frac{2}{n^2} = 0 .$$

Problema 11

Mediante la definición de límite, pruébese que las sucesiones

$$\text{a)}\ (a_n) = \left(\frac{n-1}{2n}\right) \quad \text{y} \quad \text{b)}\ (b_n) = \left(\frac{3n+2}{n-1}\right)$$

son sucesiones convergentes.

Solución

a) Veamos que $\lim_n (a_n) = \frac{1}{2}$.

Dado $\varepsilon > 0$ se debe encontrar un número natural n_o tal que $|a_n - a| < \varepsilon$

para todo $n \geq n_0$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $\frac{1}{2n_0} < \varepsilon$ y

$$\left|\frac{n-1}{2n} - \frac{1}{2}\right| = \left|\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2}\right| = \left|-\frac{1}{2n}\right| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{2n_0} < \varepsilon$$

se verifica para todo $n \geq n_0$.

b) Veamos que $\lim_{n \to \infty} (b_n) = 3$.

Dado $\varepsilon > 0$, la desigualdad siguiente

$$\left|\frac{3n+2}{n-1} - 3\right| = \left|\frac{3n+2-3n+3}{n-1}\right| = \left|\frac{5}{n-1}\right| = \frac{5}{n-1} < \varepsilon$$

es cierta para todo $n \geq n_0$, si $n_0 > \frac{5+\varepsilon}{\varepsilon}$.

Problema 12

Demuéstrese, mediante la definición de límite, que no existe el límite de la sucesión de números racionales definida por

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ \frac{1}{n} & \text{si} \quad n \text{ es par} \end{cases}$$

Solución

Se procede por reducción al absurdo. Supongamos que existe el límite $a \in \mathbf{R}$ de la sucesión (a_n). Por definición de límite, para todo $\varepsilon > 0$ existe un n_0 natural tal que $|a_n - a| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. En particular, para $\varepsilon = 1/4$ existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|a_n - a| < \frac{1}{4}$ para todo $n \geq n_0$. Entonces, si n es un número natural impar y $n \geq n_0$ se tiene que $a_n = 1$ y, por tanto, $|1 - a| < \frac{1}{4}$, y consecuentemente,

$$\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4} < a < 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}.$$

Por otra parte, para todo número natural par m con $m>n_0$ se tiene que $\left|\frac{1}{m}-a\right|<\frac{1}{4}$ y, por tanto, $a<\frac{1}{4}+\frac{1}{m}$ de donde resulta la siguiente contradicción:

$$\frac{3}{4}<a\leq\frac{1}{4}.$$

Así pues, no existe $\lim_n (a_n)$.

Problema 13

Calcular el límite de la sucesión $(a_n)=\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}\right)$.

Solución

Escribimos explícitamente los primeros términos de la sucesión:

$$a_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

$$a_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$

$$a_3=(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3})+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$$

$$a_4=(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4})+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{20}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}.$$

Observemos que a_n parece tener la forma $\frac{n}{n+1}$. Para probar esto, utilizamos el principio de inducción:

- Para n=1 es cierto que $a_1=\frac{1}{1+1}$.
- Supuesto cierto para n, es decir, $a_n=\frac{n}{n+1}$ se prueba que es cierto para n+1 :

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}.$$

Así pues, $(a_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)$, por tanto, $\lim_n (a_n) = 1$.

Problema 14

Determinar una sucesión (a_n) tal que $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ existe y $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ no existe.

Solución

Sea

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{3^n} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n}{3^n} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}.$$

Se tiene que

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{\sqrt[n]{n}}{3} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por tanto, $\lim_n \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{3}$. (Ver el primer apartado del Problema 21).

La sucesión

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{n+1}{3} & \text{si} \quad n \text{ es impar} \\ \frac{1}{3n} & \text{si} \quad n \text{ es par} \end{cases}$$

posee una subsucesión (términos pares) que tiende a $+\infty$ y una subsucesión (téminos impares) que tiende a 0. Así pues, no existe el límite $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Problema 15

Dada la sucesión $a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{si} \quad n \text{ es par} \\ \frac{1}{5^n} & \text{si} \quad n \text{ es impar} \end{cases}$.

Calcular $\lim_n \sup \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\lim_n \inf \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $\lim_n \sup \sqrt[n]{a_n}$, $\lim_n \inf \sqrt[n]{a_n}$.

Solución

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \frac{5^n}{2^{n+1}} & \text{si } n \text{ impar} \\ \frac{2^n}{5^{n+1}} & \text{si } n \text{ par} \end{cases} \quad \text{y} \quad \sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } n \text{ par} \\ \frac{1}{5} & \text{si } n \text{ impar} \end{cases} .$$

Por tanto,

$\lim_n \inf \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$, pues la subsucesión de los pares tiende a 0.

$\lim_n \sup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, pues la subsucesión de los impares tiende a ∞.

$\lim_n \sup \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2}$, pues la subsucesión de los pares tiende a $\frac{1}{2}$.

$\lim_n \inf \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{5}$, pues la subsucesión de los impares tiende a $\frac{1}{5}$.

Problema 16

Demostrar que la sucesión (a_n), con $a_n = (-\frac{1}{n}) \cos (\frac{n}{\sqrt{n+2}})$,

es convergente. Calcular su límite.

Solución

Como

$$\left| \cos (\frac{n}{\sqrt{n+2}}) \right| \leq 1$$

para todo n, (a_n) es la sucesión que se obtiene al multiplicar las sucesiones $(\cos (\frac{n}{\sqrt{n+2}}))$ que es acotada, y $(-\frac{1}{n})$ que es una sucesión nula.

Por tanto, (a_n) es también una sucesión nula; es decir, $\lim_n a_n = 0$.

Problema 17

Calcular el límite de la sucesión (a_n) tal que

$$\begin{cases} a_1 < 0 \\ a_n = -\dfrac{1}{(2+n)^{a_{n-1}} n^2} \qquad \text{para} \qquad n > 1 \end{cases}.$$

Solución

Los términos de la sucesión (a_n) son negativos ya que $(2+n)^{a_{n-1}} n^2 \geq 0$ para todo n. Además, $(2+n)^{a_{n-1}} > 1$. En consecuencia, si $(b_n)=\left(-\frac{1}{n^2}\right)$ y (c_n) es la sucesión cuyos términos son todos nulos, se verifica que:

$$(b_n) \leq (a_n) \leq (c_n).$$

Como $\lim_n b_n = \lim_{n \to \infty} c_n = 0$, entonces existe $\lim_n a_n$ y es igual a 0.

Problema 18

Demostrar que la sucesión (a_n) es de Cauchy, con

$$a_n = \sec^{2n}(2\pi n) .$$

Solución

Todos los términos de la sucesión $(\sec(2\pi n))$ son igual a 1, $\sec^{2n}(2\pi n) = 1$ para todo n, por lo cual $\lim_{n \to \infty} a_n = 1$.

Entonces (a_n) es una sucesión convergente, y en consecuencia es una sucesión de Cauchy.

Problema 19

Calcular, aplicando el criterio de Stolz, el límite de la sucesión (a_n) cuyo término general es:

$$a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}{Ln\,(n)}.$$

Solución

La sucesión que forma el denominador es creciente y divergente, así pues, se puede aplicar el criterio de Stolz.

$$a = \lim_n a_n = a = \lim_n \frac{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}{Ln\,(n)} =$$

$$= \lim_n \frac{(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}) - (1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1})}{Ln\,(n) - Ln\,(n-1)} =$$

$$= \lim_n \frac{\frac{1}{n}}{Ln\,(n) - Ln\,(n-1)} = \lim_n \frac{\frac{1}{n}}{Ln\frac{n}{n-1}}.$$

Al aplicar las propiedades algebraicas de los límites se produce una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ en el último límite.

Para resolver esta indeterminación, consideramos el siguiente funcional, al cual se le aplica la regla de l´Hôpital para reducir la indeterminación.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{Lnx - Ln\,(x-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{Ln\frac{x}{x-1}} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 - x}{x^2} = 1.$$

Así pues, $a = 1$

Problema 20

Hallar $\lim_n \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2-1}$.

Solución

Sea $a = \lim_n \dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{n^2-1}$, como $a = \lim_n \dfrac{a_n}{b_n}$, en donde

$$a_n = 1+3+5+\ldots+(2n+1) \quad \text{y} \quad b_n = n^2-1.$$

Dado que la sucesión (b_n) es monótona creciente con límite $+\infty$, podemos aplicar el criterio de Stolz.

Por consiguiente:

$$a = \lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} =$$

$$= \lim_n \frac{(1+3+\ldots+(2n-1)) - (1+3+\ldots+(2n-3))}{(n^2-1) - ((n-1)^2-1)} =$$

$$= \lim_n \frac{2n-1}{2n-1} = 1.$$

Problema 21

Demostrar que:

a) $\lim_n \sqrt[n]{n} = 1$.

b) $\lim_n \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}+\sqrt[6]{6}+\sqrt[8]{11}+\ldots}{5n+3} = \dfrac{1}{5}$.

Solución

a) Basta con demostrar que $\lim_n (\sqrt[n]{n} - 1) = 0$.

Sea $\varepsilon_n = \sqrt[n]{n} - 1$, que es un número no negativo, $\varepsilon_n \geq 0$. En consecuencia, como $\sqrt[n]{n} = \varepsilon_n + 1$, se verifica que:

$$n = (1+\varepsilon_n)^n = 1 + \binom{n}{1}\varepsilon_n + \binom{n}{2}\varepsilon_n^2 + \ldots =$$

$$= 1 + n \cdot \varepsilon_n + \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon_n^2 + \ldots > \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon_n^2,$$

de donde resulta

$$n \geq \frac{n(n-1)}{2}\varepsilon_n^2 \Rightarrow \frac{2}{n-1} \geq \varepsilon_n^2 \Rightarrow \varepsilon_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}, \text{ para todo } n>1.$$

Por tanto, $0 \leq \varepsilon_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}$ para todo $n>1$.

Al ser $\lim_n \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}\right) = 0$, basta con aplicar la "regla del sandwich" y se obtiene que

$$\lim_n \varepsilon_n = 0 \ .$$

Así pues,

$$\lim_n \sqrt[n]{n} = 1 \quad .$$

b) Puesto que la sucesión (5n+3) es monótona creciente con límite ∞, podemos aplicar el criterio de Soltz.

Por consiguiente:

$$c = \lim_n \frac{a_n}{b_n} = \lim_n \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} =$$

$$= \lim_n \frac{\sqrt{2} + \sqrt[4]{3} + \ldots + \sqrt[2n]{(n-1)^2 + 2}}{5n + 3 - (5(n-1) + 3)} -$$

$$- \lim_n \frac{\sqrt{2} + \sqrt[4]{3} + \ldots + \sqrt[2(n-1)]{(n-2)^2 + 2}}{5n + 3 - (5(n-1) + 3)} =$$

$$= \lim_n \frac{\sqrt[2n]{(n-1)^2 + 2}}{5} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{n}}{5},$$

y, por el apartado anterior, dicho límite es igual a $\frac{1}{5}$.

Problema 22

Se considera la sucesión (a_n) definida por

$$a_n = \begin{cases} (\frac{1}{3})^{2n-2} & \text{si n es par} \\ (\frac{1}{3})^{2n-1} & \text{si n es impar} \end{cases}.$$

Estudiar $\lim_n \sqrt[n]{a_n}$ y $\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n}$ y calcularlos si existen.

Solución

Se tiene el término general,

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} (\frac{1}{3})^{2-\frac{2}{n}} & \text{si n es par} \\ (\frac{1}{3})^{2-\frac{1}{n}} & \text{si n es impar} \end{cases}.$$

De donde,

$$\lim_n \sqrt[n]{a_n} = (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{9}.$$

De forma análoga,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{(\frac{1}{3})^{2n+2-2}}{(\frac{1}{3})^{2n-2}} & \text{si n es par} \\ \dfrac{(\frac{1}{3})^{2n+2-1}}{(\frac{1}{3})^{2n-1}} & \text{si n es impar} \end{cases}.$$

Es decir,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} (\frac{1}{3})^2 & \text{si n es par} \\ (\frac{1}{3})^2 & \text{si n es impar} \end{cases}.$$

Por tanto,

$$\lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Problema 23

Calcular

$$\lim_n \left(\cos \frac{n}{n^2+1}\right)^{2n-3}$$

Solución

Al aplicar las propiedades algebraicas de los límites y las propiedades de la función coseno aparece una indeterminación del tipo 1^{∞} que salvamos con la técnica siguiente:

Sea $c = \lim_n a_n^{b_n}$. Al tomar logaritmos y aplicar las propiedades de los logaritmos se obtiene

$$Lnc = \lim_n b_n Lna_n = \lim_n b_n (a_n - 1)$$

en efecto,

$$\lim_n a_n^{b_n} = \lim_n (1 + (a_n - 1))^{b_n} = \lim_n \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n - 1}}\right)^{b_n} =$$

$$= \lim_n \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n - 1}}\right)^{b_n \frac{(a_n - 1)}{(a_n - 1)}} = \lim_n \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{a_n - 1}}\right)^{\frac{1}{(a_n - 1)}}\right)^{\lim_n b_n (a_n - 1)}$$

Por consiguiente, $c = e^{\lim_n b_n (a_n - 1)}$.

Si se tiene en cuenta la fórmula del ángulo mitad $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ y que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$, tomados $a_n = \cos \frac{n}{n^2 + 1}$ y $b_n = 2n\text{-}3$ resulta que $a_n\text{-}1 = \cos \frac{n}{n^2 + 1} \text{-} 1 = -2 \operatorname{sen}^2 \frac{n}{\frac{n^2 + 1}{2}}$ y

$$\lim_n (2n - 3)\ (-2\ (\operatorname{sen}^2 \frac{n}{2n^2 + 2})) =$$

$$= \lim_n (2n - 3) \left((-2)\ (\frac{n}{2n^2 + 2})^2\right) =$$

$$= \lim_n \frac{-2\,(2n - 3)\,n^2}{(2n^2 + 2)^2} = 0\ .$$

En consecuencia, $c = e^0 = 1$.

Tema 2

Límites de funciones

Problema 1

Calcular $\lim_{x \to \infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1}$.

Solución

Como $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ para todo $x \in \mathbf{R}$ y,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x^2 + 1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{x + \frac{1}{x}} = \frac{1}{+\infty + 0} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

abuso notacional

para cada $\varepsilon > 0$ existe un $k \in \mathbf{R}$ tal que para todo $x > k$ se verifica que

$$\left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| < \varepsilon,$$

y, por tanto, para todo $x > k$ se cumple que

$$\left| \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1} \right| = \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| \cdot |\operatorname{sen} x| \leq \left| \frac{x}{x^2 + 1} \right| < \varepsilon.$$

Luego, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{x^2 + 1} = 0$.

Problema 2

Calcular $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x(x+1)} - x)$.

Solución

Al aplicar las propiedades algebraicas de los límites se produce una indeterminación del tipo, ∞-∞. En este caso, la indeterminación se salva al multiplicar y dividir por la expresión conjugada.

$$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x(x+1)} - x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(\sqrt{x(x+1)} - x)(\sqrt{x(x+1)} + x)}{(\sqrt{x(x+1)} + x)} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} .$$

Al aplicar nuevamente las propiedades algebraicas de los límites se produce otra nueva indeterminación del tipo, $\frac{\infty}{\infty}$. En este caso se salva dicha indeterminación al dividir numerador y denominador por x :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1}{2} .$$

Problema 3

Calcular $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{|x|}{x}}$ y $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{|x|}{x}}$.

Solución

Si $x > 0$ entonces $e^{\frac{|x|}{x}} = e^1 = e$ y, por tanto $\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{|x|}{x}} = e$.

Si $x<0$ entonces $e^{\frac{|x|}{x}} = e^{\frac{-x}{x}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$ y, por tanto $\lim_{x \to 0^-} e^{\frac{|x|}{x}} = \frac{1}{e}$.

Se observa que no existe límite de la función $e^{\frac{|x|}{x}}$ cuando x tiende a 0, puesto que los límites laterales son distintos.

Problema 4

Calcular $\lim_{x \to +\infty} x^{2/3} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$.

Solución

Si se tiene en cuenta la igualdad $a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ y se considera $a = \sqrt[3]{x+1}$ y $b = \sqrt[3]{x}$, la indeterminación $\infty-\infty$ que se produce al aplicar las propiedades algebraicas de los límites se reduce de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to +\infty} [x^{2/3} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^{2/3} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)x} + \sqrt[3]{x^2})}{(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)x} + \sqrt[3]{x^2})} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x^{2/3} \cdot \frac{(x+1) - x}{(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x+1)x} + \sqrt[3]{x^2})} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2+2x+1} + \sqrt[3]{x^2+x} + \sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2}}}{\sqrt[3]{\frac{x^2+2x+1}{x^2}} + \sqrt[3]{\frac{x^2+x}{x^2}} + \sqrt[3]{\frac{x^2}{x^2}}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}} + \sqrt[3]{1+\frac{1}{x}} + \sqrt[3]{1}} = \frac{1}{3} .$$

Problema 5

Calcular $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{5}{x^3-1}\right)$.

Solución

Si aplicamos las propiedades algebraicas de los límites (sustituimos x por 1 en la expresión) resulta la indeterminación $\infty-\infty$. Esta se resuelve de la siguiente forma:

Para todo número real positivo $x \neq 1$ se tiene

$$\frac{1}{x^2-1} - \frac{5}{x^3-1} = \frac{(x^3-1)-5(x^2-1)}{(x^2-1)(x^3-1)} = \frac{x^3-5x^2+4}{(x^2-1)(x^3-1)} =$$

$$= \frac{(x-1)(x^2-4x-4)}{(x-1)(x+1)(x^3-1)} = \frac{x^2-4x-4}{x^4+x^3-x-1} .$$

Entonces

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{5}{x^3-1}\right) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2-4x-4}{x^4+x^3-x-1} \overset{\text{abuso notacional}}{=} \frac{-7}{0} = -\infty .$$

Problema 6

Calcular $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

Solución

Si aplicamos las propiedades algebraicas de los límites (sustituimos x por 0 en la expresión) se produce la indeterminación $\dfrac{0}{0}$. En este caso, esta se reduce multiplicando numerador y denominador por $(\sqrt{1+x}+1)$

$$\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{(\sqrt{1+x}-1)\,(\sqrt{1+x}+1)}{x\,(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1+x-1}{x\,(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}.$$

Entonces,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}.$$

Problema 7

Calcular $\lim_{x \to \infty} x^2\,(\sqrt{x^3+1}-x^2)$.

Solución

Si aplicamos las propiedades algebraicas de los límites (sustituimos x por ∞ en la expresión) resulta la indeterminación ∞-∞, que salvamos de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to \infty} x^2\,(\sqrt{x^3+1}-x^2) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\,(\sqrt{x^3+1}-x^2)\,(\sqrt{x^3+1}+x^2)}{\sqrt{x^3+1}+x^2} =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^2\,[\,(x^3+1)-x^4\,]}{\sqrt{x^3+1}+x^2} = \lim_{x \to \infty} \frac{-x^6+x^5+x^2}{\sqrt{x^3+1}+x^2}.$$

Pero al aplicar nuevamente las propiedades algebraicas de los límites, aparece la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$. Esta indeterminación se resuelve en este caso al dividir el numerador y denominador por x^6. Así pues,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-x^6+x^5+x^2}{\sqrt{x^3+1}+x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}{\sqrt{\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{12}}}+\frac{1}{x^4}}\ .$$

Por tanto

$$\lim_{x\to\infty}x^2(\sqrt{x^3+1}-x^2)=\lim_{x\to\infty}\frac{-1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^4}}{\sqrt{\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{12}}}+\frac{1}{x^4}}\overset{\text{abuso notacional}}{=}-\frac{1}{0}=-\infty\ .$$

Problema 8

Sea $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0$, con $a_n\neq 0$, y f una función de **R** en **R**.

Demostrar la igualdad: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{P(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{a_nx^n}$.

Solución

Calculamos, salvando las indeterminaciones, $\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{a_nx^n}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0}{a_nx^n}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{1}{x}+...+\frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{x^n}\right)=$$

$$= \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{1}{x} + \ldots + \lim_{x\to\infty} \frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{x^n} = 1+0+\ldots+0 = 1 \ .$$

Como el límite de un producto es el producto de los límites siempre que no se produzca indeterminación, se tiene:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{P(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{P(x)} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{P(x)}{a_n x^n} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{a_n x^n} \ .$$

Problema 9

Probar que la función $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \notin Q \\ 1 & \text{si} \quad x \in Q \end{cases}$$

no tiene límites por la derecha ni por la izquierda en ningún punto.

Solución

Procedemos a demostrar el enunciado por reducción al absurdo. Se supone que existen $a,b\in\mathbf{R}$ tales que $\lim_{x\to a^+} f(x) = b$ y se comprueba que se produce una contradicción.

Por la definición de límite, dado $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ existe $\delta>0$ tal que para todo $x>a$ que cumple $0<x-a<\delta$, se verifica que $|f(x) - b| < \varepsilon$.

En el intervalo $(a, a+\frac{\delta}{2})$, existen dos puntos $x_1,x_2\in (a, a+\frac{\delta}{2})$ tales que $x_1\in\mathbf{Q}$ y $x_2\notin\mathbf{Q}$, por tanto

$$x_1 - a < \frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow |f(x_1) - b| < \frac{1}{2} \text{ y } x_2 - a < \frac{\delta}{2} < \delta \Rightarrow |f(x_2) - b| < \frac{1}{2} \ .$$

Por otro lado se tiene:

$$1 = |1-0| = |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - b + b - f(x_2)|$$

$$\leq |f(x_1) - b| + |f(x_2) - b| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \ .$$

Así pues, se ha obtenido la desigualdad $1 < 1$, lo cual es una contradicción.

Análogamente se demuestra que f(x) no tiene límite por la izquierda en ningún punto.

Problema 10

Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si} \quad x < -1 \\ 0 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} & \text{si} \quad 1 < x \end{cases} \ .$$

Hallar el límite por la derecha y por la izquierda en $x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$ y $x = 1$. Comprobar los resultados mediante la definición.

Solución

En $x = -1$:

La expresión de la función f(x) cuando x tiende a -1 por la izquierda es $\frac{1}{x+1}$. La expresión x+1 es negativa y tiende a cero si x tiende a -1 con $-1 > x$, luego, f(x) es una función negativa a la izquierda del punto -1, en un entorno de dicho punto.

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{x+1} = -\infty \ .$$

Comprobación: Dado $k \in \mathbf{R}$ tenemos que determinar un $\delta > 0$ tal que si $0 < -1 - x < \delta$, entonces $f(x) < k$. Es decir, $\frac{1}{x+1} < k$.

Sea $k < 0$, $\frac{1}{x+1} = -\frac{1}{-1-x} < -\frac{1}{\delta}$, ya que si $-1-x < \delta$ entonces $\frac{1}{-1-x} > \frac{1}{\delta}$ y $-\frac{1}{-1-x} < -\frac{1}{\delta}$. Luego $\frac{1}{x+1} < -\frac{1}{\delta}$.

Fijándonos en la igualdad $-\frac{1}{\delta} = k$, es decir $\delta = -\frac{1}{k}$ se tiene el resultado (nótese que $\delta > 0$ ya que $k < 0$).

Si $k \geq 0$, tomamos el δ correspondiente a $k_1 = -1$, cumpliéndose que si $0 < -1-x < \delta$ entonces

$$\frac{1}{x+1} < -\frac{1}{\delta} = -\frac{1}{-\frac{1}{k_1}} = k_1 < k .$$

La expresión de f(x) cuando x tiende a -1 por la derecha es 0, es claro que

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = 0 \quad .$$

Comprobación: Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que determinar un $\delta > 0$ tal que si $0 < |x - (-1)| < \delta$ entonces $|f(x) - 0| < \varepsilon$.

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $\delta = 2$ de forma que si $0 < x+1 < 2$ entonces

$$0 < x+1 \quad \Rightarrow \quad -1 < x$$

$$x+1 < 2 \quad \Rightarrow \quad x < 1$$

es decir $-1 < x < 1$, luego $f(x) = 0$ y

$$|f(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon.$$

En $x = -\frac{1}{2}$:

En este caso los límites laterales coinciden y valen cero.

Comprobación:Dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{1}{4}$ tal que si

$$\left|x - (-\frac{1}{2})\right| = \left|x + \frac{1}{2}\right| < \delta = \frac{1}{4}$$

entonces

$$|x| = \left|x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right| \leq \left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 .$$

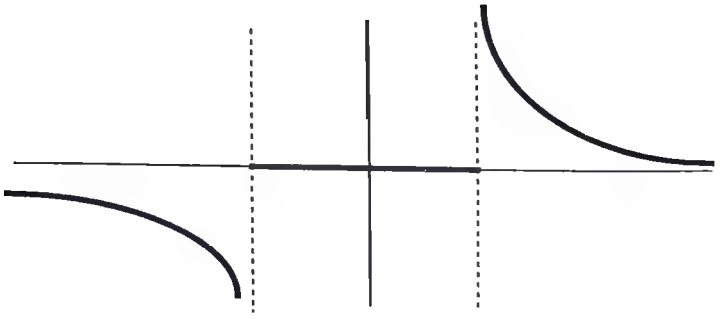
Luego, $-1 < x < 1 \Rightarrow f(x) = 0$ y

$$|f(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon.$$

En $x = 1$:

La expresión de la función f(x) por la derecha de 1 es $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$. Obsérvese que si $x > 1$ la función $\sqrt{x-1}$ está bien definida pues $x-1 > 0$ y tiende a 0, luego el límite lateral buscado es $+\infty$.

Comprobación: Dado un $k \in \mathbf{R}$, tenemos que determinar un $\delta > 0$ tal que si $0 < x-1 < \delta$ entonces $f(x) > k$. Es decir $\frac{1}{\sqrt{x-1}} > k$.



Sea $k > 0$, si $0 < x-1 < \delta$ entonces $\frac{1}{\sqrt{x-1}} > \frac{1}{\sqrt{\delta}}$. Al observar la igualdad

$\frac{1}{\sqrt{\delta}} = k$, es decir $\delta = \frac{1}{k^2}$, se tiene el resultado.

Si $k \leq 0$, tomando el δ correspondiente a $k_1 = 1$, cumpliéndose que si $0 < x-1 < \delta$ entonces

$$\frac{1}{\sqrt{x-1}} > \frac{1}{\sqrt{\delta}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(k_1)^2}}} = k_1 > k \quad .$$

La expresión de f(x) cuando x se aproxima a 1 por la izquierda vale 0, es claro que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 0$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $\delta = \frac{1}{2}$ tal que si $0 < 1 - x < \frac{1}{2}$ entonces

$$0 < 1-x \quad \Rightarrow \quad x < 1$$

$$1-x < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 1 - \frac{1}{2} < x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} < x,$$

es decir $\frac{1}{2} < x < 1$, luego $f(x) = 0$ y $|f(x) - 0| = |0 - 0| = 0 < \varepsilon$.

Problema 11

Calcular $\lim_{x \to 81} \frac{\sqrt{x} - 9}{\sqrt[4]{x} - 3}$.

Solución

Al aplicar la propiedades algebraicas de los límites se produce la indeterminación $\frac{0}{0}$. Esta se resuelve fácilmente si previamente sustituimos x por una nueva variable; en este caso $x = y^4$. Como x tiende a 81 entonces y tiende a 3, resultando que

$$\lim_{x \to 81} \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}-3} = \lim_{y \to 3} \frac{y^2-9}{y-3}.$$

Aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$ que resolvemos de la siguiente forma:

$$\lim_{y \to 3} \frac{y^2-9}{y-3} = \lim_{y \to 3} \frac{(y-3)\,(y+3)}{y-3} = \lim_{y \to 3} y+3 = 6.$$

Luego, $\lim_{x \to 81} \frac{\sqrt{x}-9}{\sqrt[4]{x}-3} = 6$.

Problema 12

Calcular $\lim_{y \to 0} \frac{\sqrt{y^2+1}-1}{\sqrt[3]{y^2+1}-1}$.

Solución

Al aplicar la propiedades algebraicas de los límites se produce la indeterminación $\frac{0}{0}$. Esta se resuelve fácilmente si hacemos $x^6 = y^2+1$. Como y tiende a 0 entonces x tiende a 1, resulta que

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sqrt{y^2+1}-1}{\sqrt[3]{y^2+1}-1} = \lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1}.$$

Aparece la indeterminación $\frac{0}{0}$, que resolvemos de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)\,(x^2+x+1)}{(x-1)\,(x+1)} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1}.$$

Por tanto,

$$\lim_{y\to 0}\frac{\sqrt{y^2+1}-1}{\sqrt[3]{y^2+1}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}.$$

Problema 13

Calcular $\lim_{x\to\pi}\dfrac{x^2-2\pi x+\pi^2}{x-\pi}$.

Solución

Al aplicar la propiedades algebraicas de los límites se produce la indeterminación $\frac{0}{0}$, que solventamos dividiendo el numerador y el denominador por $x-\pi$, resultando

$$\lim_{x\to\pi}\frac{x^2-2\pi x+\pi^2}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}\frac{(x-\pi)\,(x-\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi}x-\pi=0\ .$$

Problema 14

Calcular $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[3]{x^2+3}-\sqrt[3]{x^2})$.

Solución

Al aplicar la propiedades algebraicas de los límites se produce la indeterminación $\infty-\infty$. Para salvar esta indeterminación procedemos de la siguiente forma:

Utilizamos la identidad $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, de donde

$$(a-b)=\frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}\ ,$$

y tomemos $a=\sqrt[3]{x^2+3}$ y $b=\sqrt[3]{x^2}$. Entonces se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2+3} - \sqrt[3]{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt[3]{x^2+3})^3 - (\sqrt[3]{x^2})^3}{(\sqrt[3]{x^2+3})^2 + \sqrt[3]{x^2+3}\cdot\sqrt[3]{x^2} + (\sqrt[3]{x^2})^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3-x^2}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2} + \sqrt[3]{(x^2+3)\cdot x^2} + \sqrt[3]{x^4}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt[3]{(x^2+3)^2} + \sqrt[3]{(x^2+3)\cdot x^2} + \sqrt[3]{x^4}} = \frac{3}{\infty} = 0 .$$

Problema 15

Calcular $\lim_{x\to\infty} (\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} - x)$.

Solución

Al aplicar la propiedades algebraicas de los límites se produce la indeterminación $\infty-\infty$ (sustituimos x por $+\infty$ en la expresión), que salvamos de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} - x) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} - x)(\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} + x)}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} + x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{((x+\alpha)(x+\beta)) - x^2}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} + x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta - x^2}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} + x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{(\alpha+\beta)x + \alpha\beta}{\sqrt{(x+\alpha)(x+\beta)} + x} .$$

Pero resulta que si sustituimos en esta última expresión x por $+\infty$, aparece la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ que resolvemos dividiendo por x el numerador y el denominador, de donde

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha+\beta)\,x+\alpha\beta}{\sqrt{(x+\alpha)\,(x+\beta)}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{(\alpha+\beta)\,x}{x}+\dfrac{\alpha\beta}{x}}{\sqrt{\dfrac{(x+\alpha)\,(x+\beta)}{x^2}}+\dfrac{x}{x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha+\beta)+\dfrac{\alpha\beta}{x}}{\sqrt{(1+\dfrac{\alpha}{x})\,(1+\dfrac{\beta}{x})}+1}\,.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{(x+\alpha)\,(x+\beta)}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{(\alpha+\beta)+\dfrac{\alpha\beta}{x}}{\sqrt{(1+\dfrac{\alpha}{x})\,(1+\dfrac{\beta}{x})}+1}=\frac{\alpha+\beta}{2}\,.$$

Tema 3 Funciones Continuas

Problema 1

Una función f se define por la expresión

$$\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+55x}+\sqrt{1+8x}}{x+\sqrt{x+1}}.$$

Determinar el mayor conjunto $A \subset \mathbf{R}$ en el cual la función f es continua.

Solución

Si A es el mayor subconjunto de $\mathbf{R}$ en el que $f:A \to \mathbf{R}$ es continua, entonces el conjunto A debe estar contenido en el dominio de f. Por tanto, los radicandos deben ser no negativos, es decir, 1+2x , 1+55x , 1+8x , x+1 deben ser mayores o iguales que cero para que exista su raíz cuadrada, y además el denominador no se debe anular.

$$1+2x \geq 0 \quad \text{si} \quad x \geq -\frac{1}{2},$$

$$1+55x \geq 0 \quad \text{si} \quad x \geq -\frac{1}{55},$$

$$1+8x \geq 0 \quad \text{si} \quad x \geq -\frac{1}{8},$$

$$x+1 \geq 0 \quad \text{si} \quad x \geq -1,$$

Luego, si $x \in A$, entonces $x \geq \max\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{55}, -\frac{1}{8}, -1\} = -\frac{1}{55}$

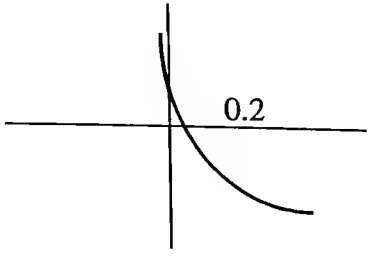
Además, $x + \sqrt{x+1}$ debe ser distinto de cero, por tanto, $x \neq -\sqrt{x+1}$. Es decir, $x \in A$ no puede satisfacer la ecuación $x^2 = x + 1$; las soluciones de esta ecuación son $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Como $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < -\frac{1}{55}$ y obviamente el punto $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ no anula la ecuación $x + \sqrt{x+1}$ resulta que el dominio de definición es la semirrecta $\left(-\frac{1}{55}, +\infty\right)$ y, por tanto, $A \subset \left(-\frac{1}{55}, +\infty\right)$.

La función f es cociente de dos funciones continuas:

$$\sqrt{1+2x} - \sqrt{1+55x} + \sqrt{1+8x} \quad \text{y} \quad x + \sqrt{x+1},$$

que son continuas en $\left(-\frac{1}{55}, +\infty\right)$, por ser composición y suma de funciones continuas, y en ese conjunto la función $x + \sqrt{x+1}$ no se anula nunca, luego $A = \left(-\frac{1}{55}, +\infty\right)$ es el conjunto pedido.



Observación: La función es continua por la derecha en $x = -\frac{1}{55}$.

Problema 2

Sea f: [0,2] → **R** una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad 0 \le x \le 1 \\ 1+x & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \end{cases}.$$

Estudiar la continuidad de esta función.

Solución

La función f es continua en todo punto $x \in [0,1) \cup (1,2]$, puesto que está definida por partes y en cada una de ellas se utiliza una función continua. Así pues, el único punto en el cual pudiera ser discontinua es $x = 1$. Veamos que no es continua en el punto 1.

Si f es continua en $x = 1$, entonces dado $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(1)| = |f(x) - 1| < \frac{1}{2}$$

para todo $x \in [0,2]$ tal que $|x-1| < \delta$. Pero esto no es cierto, ya que si $0 < r < \min\{\delta, 1\}$ entonces

$$1 < 1+r < 2 \quad \text{y} \quad |(1+r) - 1| = r < \delta,$$

pero $f(1+r) = 1 + (1+r) = 2+r$ y

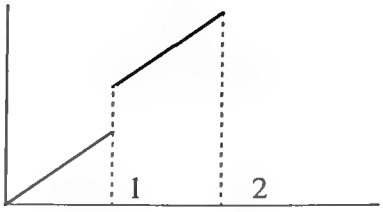
$$|f(1+r) - f(1)| = |2+r-1| = 1+r > 1 > \frac{1}{2},$$

lo cual es una contradicción. Así pues, la función no es continua en $x = 1$.

Nótese que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2,$$

por tanto no existe $\lim_{x \to 1} f(x)$. Si no existe límite cuando x tiende a 1 entonces la función no es continua en $x = 1$.



Problema 3

Demostrar que la ecuación $x^5 + 4x^3 - 2x + 2 = 0$ tiene al menos una solución en **R**.

Solución

Consideramos la función $f:\mathbf{R}\rightarrow\mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^5 + 4x^3 - 2x + 2$.

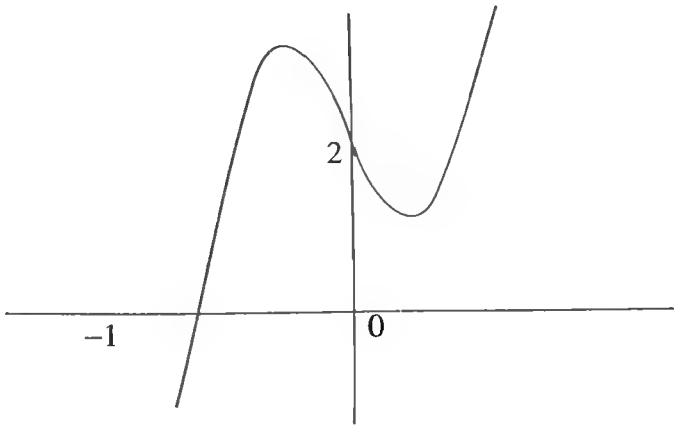
Esta función es continua en **R** y verifica que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \ ,$$

luego, existen un par de números a y b (por ejemplo -1 y 0) tales que

$$f(b) > 0 \quad \text{y} \quad f(a) < 0.$$

La función f cumple las condiciones del teorema de Bolzano, así pues, resulta que existe al menos un número real c, $a<c< b$, tal que $f(c) = 0$. Es decir, c es solución de la ecuación de partida.



Problema 4

Si $A \subset \mathbf{R}$ y $f:A \to \mathbf{R}$ es una función continua no negativa en A, probar que $g:A \to \mathbf{R}$, definida $g(x) = \sqrt{f(x)}$ para todo $x \in A$, es continua en A.

Solución

Sea $h:[0, +\infty) \to \mathbf{R}$ definida por $h(x) = x^2$ para todo $x \in [0, +\infty)$. La función h es continua en $[0, +\infty)$ y, además, como $h([0, +\infty)) = [0, +\infty)$, si $x_1, x_2 \in [0, +\infty)$ tales que $x_1 < x_2$ entonces

$$h(x_1) = x_1^2 < x_2^2 = h(x_2),$$

es decir, la función h es estrictamente creciente. Por tanto, existe su función inversa y esta función inversa es continua

$$h^{-1}:[0, +\infty) \to [0, +\infty) \subset \mathbf{R},$$

que se denota por $h^{-1}(x) = \sqrt{x}$,

$$h(h^{-1}(x)) = (h^{-1}(x))^2 = (\sqrt{x})^2 = x.$$

Luego, como $f(A) \subset [0, +\infty)$ y $g = h^{-1} \circ f$, resulta que g es continua en A por ser composición de funciones continuas.

Problema 5

Estudiar la continuidad de la función $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x} & \text{si} \quad x \leq -2 \\ \dfrac{1}{x+2} & \text{si} \quad -2 < x \leq 1 \\ \dfrac{x-1}{x^2-5x+4} & \text{si} \quad x > 1 \qquad x \neq 4 \\ 6 & \text{si} \quad x = 4 \end{cases}$$

Solución

La función esta definida en varias partes como cociente de funciones continuas donde el denominador no se anula en dicha parte, por tanto, es continua en el interior de cada parte. Basta con estudiar la continuidad de la función en los puntos $x = -2$, $x = 1$ y $x = 4$, ya que la función se expresa de dos formas distintas en cualquier entorno de estos puntos.

Para $x = -2$, se tiene dos expresiones de la función en cualquier entorno reducido del punto, por tanto se estudian los límites laterales.

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{2}{x} = -1 \text{ y } \lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{1}{x+2} = +\infty .$$

(nótese que $x+2 > 0$ para todo $x \in (-2,0)$).

Como los límites laterales no coinciden se tiene que la función f no es continua en $x = -2$.

$$f(-2) = \lim_{x \to -2^-} f(x) \neq \lim_{x \to -2^+} f(x) .$$

Para $x = 1$, se tiene dos expresiones de la función en cualquier entorno reducido del punto, por tanto se estudian los límites laterales.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{3}$$

y el otro límite lateral requiere resolver una indeterminación $\frac{0}{0}$ dividiendo el numerador y el denominador por $(x-1)$,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-1}{x^2-5x+4} = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-4} = -\frac{1}{3}.$$

Como los límites laterales no coinciden se tiene que la función f no es continua en $x = 1$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) .$$

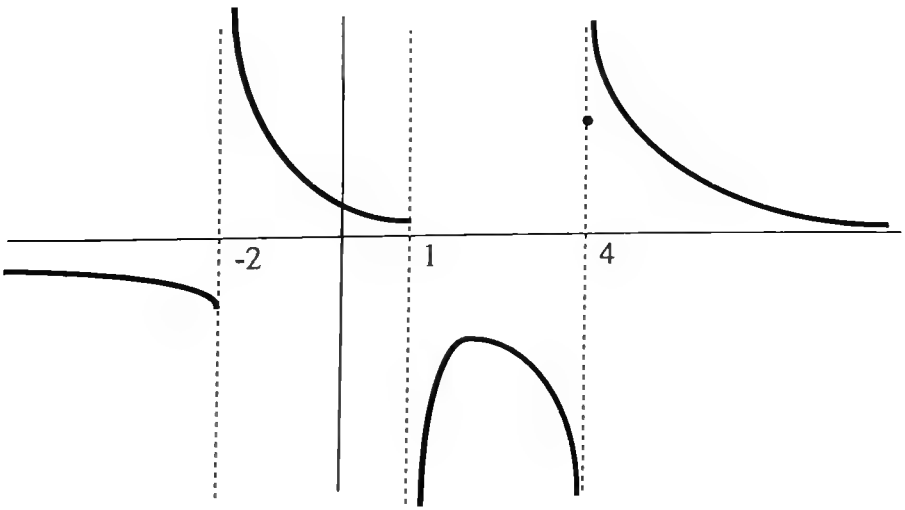
Por último, para $x = 4$, se tiene una única expresiones de la función en cualquier entorno reducido del punto. Como en $x = 4$ se anula el denominador pero no el numerador, se estudian los límites laterales

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} \frac{x-1}{x^2-5x+4} = \lim_{x \to 4^+} \frac{x-1}{(x-1)(x-4)} = \lim_{x \to 4^+} \frac{1}{x-4} = \infty,$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} \frac{x-1}{x^2-5x+4} = \lim_{x \to 4^-} \frac{1}{x-4} = -\infty .$$

Como los límites laterales no coinciden y no son finitos, se tiene que la función f no es continua en $x = 4$.

$$f(4) \neq \lim_{x \to 4^+} f(x)$$



Problema 6

Estudiar la continuidad de la función $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2-1} & \text{si} \quad x \in (-\infty, -1\,] \\ x^2+1+2x & \text{si} \quad x \in (-1, 10\,] \\ \frac{121}{10}x & \text{si} \quad x \in (10, +\infty) \end{cases}$$

Solución

En el intervalo $(-\infty,-1)$ la función está bien definida pues siempre $x^2-1>0$ y la raíz cuadrada es un número real. Además f(x) en dicho intervalo es continua pues es composición de dos funciones continuas:

$$f_1:(-\infty,-1]\to[0,+\infty) \quad y \quad f_2:[0,+\infty)\to \mathbf{R}$$

$$x \to x^2-1 \qquad\qquad x \to \sqrt{x}$$

En cualquier entorno reducido de $x=-1$ la función tiene dos expresiones, así pues, se estudián los límites laterales.

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \sqrt{x^2-1} = 0,$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} x^2+1+2x = 0,$$

$$f(-1)=0$$

Como

$$f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x),$$

resulta que f(x) es continua en $x=-1$.

En el intervalo $(-1,10)$ la función f(x) se expresa como un polinomio de orden 2, y es una función continua.

En cualquier entorno reducido de $x=10$ la función tiene dos expresiones, así pues, se estudian los límites laterales.

$$\lim_{x\to 10^-} f(x) = \lim_{x\to 10^-} x^2+1+2x = 121$$

$$\lim_{x\to 10^+} f(x) = \lim_{x\to 10^+} \frac{121}{10}x = 121$$

Como

$$f(10) = \lim_{x\to 10^-} f(x) = \lim_{x\to 10^+} f(x),$$

entonces f(x) es continua en $x=10$.

Igualmente, la función es continua en el intervalo $(10,+\infty)$, pues su expresión es un polinomio de primer grado.

Problema 7

Estudiar la continuidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{2x+4} & \text{si} \quad -\infty < x < -2 \\ 2 & \text{si} \quad x = -2 \\ \dfrac{x^2-4}{4x-8} & \text{si} \quad -2 < x \leq 1 \\ \dfrac{x^2+x-2}{4x-4} & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ 2x-3 & \text{si} \quad 2 \leq x < +\infty \end{cases}$$

Solución

Estudiamos primero la continuidad de la función en aquellos intervalos abiertos donde está definida por una única expresión.

En $(-\infty,-2)$, la expresión es $\dfrac{x^2-4}{2x+4}$, como la función es cociente de dos polinomios sólo es discontinua en los puntos donde se anule el denominador.

Al resolver $2x+4 = 0$, se tiene que $x = -2$, se observa que este punto no está en $(-\infty,-2)$. Luego $f(x)$ es continua en dicho intervalo.

En $(-2,1)$, la expresión es $\dfrac{x^2-4}{4x-8}$, $x = 2$ es el único valor que anula el denominador y no está contenido en $(-2,1)$. Luego la función es continua en todo el intervalo $(-2,1)$.

En $(1,2)$, la expresión es $\dfrac{x^2+x-2}{4x-4}$, $x = 1$ es el único valor que anula el denominador y no pertenece a $(1,2)$. Por tanto, la función es continua en todo el intervalo $(1,2)$.

En $(2,\infty)$, la función se expresa mediante el polinomio $2x-3$, por lo cual, es continua en $(2,\infty)$.

Seguidamente, se estudian aquellos puntos donde la función posee dos expresiones en cualquier entorno reducido.

En $x = -2$, como la expresión de la función varía por la derecha y por la

izquierda calculemos sus límites laterales:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{x^2-4}{4x+4} = \lim_{x \to -2^-} \frac{(x-2)\,(x+2)}{2\,(x+2)} =$$

$$= \lim_{x \to -2^-} \frac{x-2}{2} = -2 \quad ,$$

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2-4}{4x-8} = \lim_{x \to -2^+} \frac{(x-2)\,(x+2)}{4\,(x-2)} =$$

$$= \lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{4} = 0 \,.$$

Como $\lim_{x \to -2^+} f(x) \neq \lim_{x \to -2^-} f(x)$ la función no es continua en x = -2, independientemente del valor que la función tome en dicho punto.

En x = 1,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2-4}{4x-8} = \frac{1-4}{4-8} = \frac{3}{4} \,,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+x-2}{4x-4} \,,$$

al sustituir x por 1 aparece una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ que resolvemos de la siguiente forma

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)\,(x+2)}{4\,(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x+2}{4} = \frac{3}{4} \,,$$

además, $f(1) = \frac{1^2-4}{4 \cdot 1 - 8} = \frac{3}{4}$.

Como los límites coinciden y son iguales a f(1) la función es continua en x = 1.

En x = 2,

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 + x - 2}{4x - 4} = \frac{2^2 + 2 - 2}{4 \cdot 2 - 4} = 1,$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} 2x - 3 = 2 \cdot 2 - 3 = 1.$$

Como f(2) = 1, los límites por la derecha y por la izquierda en x = 2 coinciden con f(2), por tanto, la función es continua en x = 2.

Problema 8

Estudiar la continuidad de la función: $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}$.

Solución

La expresión de f(x) está bien definida en todo punto que no anule al denominador, y en dichos puntos es continua pues, es cociente de dos funciones polinómicas que son funciones continuas.

Las raíces de $x^3-6x^2+11x-6 = 0$ son $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ y $x_3 = 3$, en estos puntos la función no está definida y esto implica que la función no es continua en ellos. A continuación comprobamos que tipo de discontinuidad se presenta en cada punto.

Tenemos, una vez salvada la indeterminación correspondiente, que

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-3} = -\frac{1}{2},$$

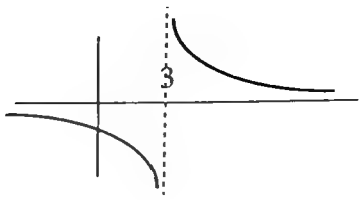
$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{x-3} = -1,$$

luego, f tiene discontinuidades evitables en los puntos x = 1 y x = 2. Además,

$$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3^-} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = \infty,$$

luego, f(x) es discontinua de salto infinito en $x_3 = 3$.



Problema 9

Probar que la ecuación $x^4 - 9x^2 + 18 = 0$ tiene una solución entre 0 y 2.

Solución

Se considera la función polinómica f(x) definida en [0,2] por la expresión $f(x) = x^4 - 9x^2 + 18$. Esta función es continua, $f(0) = 18$ y $f(2) = -2$, por tanto, se puede aplicar el Teorema de Bolzano y existe $c \in (0,2)$ tal que $f(c) = 0$.

En este caso particular se podría haber resuelto el problema simplemente resolviendo la ecuación

$$x^2 = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4.18}}{2} = \frac{9 \pm 3}{2} = \begin{cases} 6 \\ 3 \end{cases}$$

entonces

$$x = \sqrt{6}\ ,\ x = -\sqrt{6}\ ,\ x = \sqrt{3}\ ,\ x = -\sqrt{3}$$

y efectivamente $x = \sqrt{3} \in (0, 2)$.

Problema 10

Dadas las siguientes funciones

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}.$$

Estudiar la continuidad de f y g, y la continuidad de $f \circ g$ y $g \circ f$.

Solución

La función f es claramente continua en $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$. Además, $f(0)=0$ y

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} -x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x = 0 ,$$

por tanto, f es continua en $x=0$, pues

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0) .$$

La función g(x) es constante en los intervalos $(-\infty,0)$ y $(0,\infty)$ luego es continua, pero no es continua en $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^-} g(x) = -1 \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} g(x) = 1 .$$

La función $f\circ g \equiv 1$ es continua en todo **R** y la función $g\circ f \equiv 1$ también.

Observación: La composición puede eliminar discontinuidades.

Problema 11

Probar que toda ecuación polinómica $x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 = 0$ tiene al menos una raiz, si n es impar.

Solución

Si calculamos los límites, cuando x tiende a $+\infty$ y a $-\infty$, de la función

$$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0 ,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0}{x^n} \cdot \lim_{x\to-\infty} x^n =$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{x}+\ldots+\frac{a_0}{x^n}\right)\cdot \lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty \quad ,$$

y, análogamente,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty .$$

Como

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty$ implica que dado $M > 0$, existe $N > 0$ tal que si $x > N$ entonces $f(x) > M$.

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ implica que dado $M' < 0$, existe $N' < 0$ tal que si $x < N'$ entonces $f(x) < M'$.

Si tomamos $M = 1$ y $M' = -1$, entonces existe $\alpha > 0$ tal que si $x > \alpha$ entonces $f(x) > 1$, y existe $\beta < 0$ tal que si $x < \beta$ entonces $f(x) < -1$. Al considerar:

$$\beta - 1 < \beta \quad \text{resulta que} \quad f(\beta - 1) < -1$$

y

$$\alpha + 1 > \alpha \quad \text{resulta que} \quad f(\alpha + 1) > 1$$

luego se puede aplicar el teorema de Bolzano, y existe $\chi \in (\beta - 1, \alpha + 1)$ tal que $f(\chi) = 0$.

Problema 12

Demostrar que una función continua $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ tal que $f(x) = 0$ para todo x racional tiene que ser la función identicamente nula.

Solución

Razonaremos por reducción al absurdo. Supuesto que existe $z \in \mathbf{R}$ tal que $f(z) \neq 0$, probaremos que f no es continua en z.

Si se toma $\varepsilon = \dfrac{|f(z)|}{2}$ y cualquier $\delta > 0$ se tiene que si y es racional y $|z - y| < \delta$ entonces

$$|f(z) - f(y)| = |f(z) - 0| = |f(z)| > \frac{|f(z)|}{2} = \varepsilon,$$

luego, f no es continua en z. Esto contradice la hipótesis de ser f continua.

Problema 13

Probar que la función $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$ es inyectiva y que su inversa es continua en su intervalo de definición.

Solución

La función f está bien definida en todo **R** pues el denominador no se anula y es continua por ser cociente de funciones continuas y no anularse el denominador.

Veamos que f es inyectiva, es decir, veamos que si $f(x) = f(y)$ entonces $x = y$.

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x}{1+|x|} = \frac{y}{1+|y|} \Rightarrow x(1+|y|) = y(1+|x|).$$

Se pueden presentar los siguientes casos:

a) $x, y \geq 0$,

$x(1+|y|) = y(1+|x|) \Rightarrow x(1+y) = y(1+x) \Rightarrow x+xy = y+xy \Rightarrow x = y.$

b) $x, y \leq 0$,

$x(1+|y|) = y(1+|x|) \Rightarrow x(1-y) = y(1-x) \Rightarrow x-xy = y-xy \Rightarrow x = y.$

c) El caso $x < 0, y > 0$ o bien $x > 0, y < 0$ no puede darse pues siempre $|x| > 0$ y $|y| > 0$ por tanto $1+|x| > 0$ y $1+|y| > 0$ y no sería $f(x) = f(y)$ pues tendríamos un número positivo igual a un número negativo.

Por tanto f, es inyectiva.

Para ver que f^{-1} es continua aplicamos el siguiente resultado: "Si f es continua y creciente (resp. decreciente) en un intervalo I. Entonces f^{-1} es continua y creciente (resp. decreciente) en f(I)".

Comprobemos que f es continua y creciente. Dado un x_0 genérico y un $\varepsilon > 0$ tenemos que ver que existe un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$$|f(x) - f(x_0)| = \frac{x}{1+|x|} - \frac{x_0}{1+|x_0|} =$$

$$= \frac{x(1+|x_0|) - x_0(1+|x|)}{(1+|x|)(1+|x_0|)} < |x(1+|x_0|) - x_0(1+|x|)| =$$

$$= |x + x|x_0| - x_0 - x_0|x|| = |x - x_0 + x|x_0| - x_0|x|| \leq$$

$$\leq |x - x_0| + |x|x_0| - x_0|x|| =$$

$$= |x - x_0| + |x|x_0| - x_0|x_0| + x_0|x_0| - x_0|x|| \leq$$

$$\leq |x - x_0| + |x_0||x - x_0| + |x_0||x_0| - |x|| .$$

Pero $|x| = |x-y+y| \leq |x-y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x-y|$

$|y| = |x+y-x| \leq |x| + |y-x| = |x| + |x-y| \Rightarrow |y| - |x| \leq |x-y|$

por tanto $||x| - |y|| \leq |x-y|$.

Luego la última expresión será

$$|f(x) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq |x - x_0| + |x_0||x - x_0| + |x_0||x - x_0| =$$

$$= |x - x_0|(1 + |x_0| + |x_0|) =$$

$$= |x - x_0|(1 + 2|x_0|) <$$

$$< \delta\,(1 + 2|x_0|).$$

Luego dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \dfrac{\varepsilon}{1 + 2|x_0|}$ se tiene que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Por tanto f es continua.

Veamos que f es creciente, es decir si $x \leq y$ entonces $f(x) \leq f(y)$, pero

$$f(x) \leq f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{1 + |x|} \leq \frac{y}{1 + |y|} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(1 + |y|) \leq y(1 + |x|) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + x|y| \leq y + y|x| .$$

Supongamos:

a) $x, y \geq 0$,

Si $x \leq y \Rightarrow x + xy \leq y + xy$

$\Rightarrow x + x|y| \leq y + y|x| \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

b) $x, y \leq 0$,

Si $x \leq y \Rightarrow x + x|y| \leq y + y|x|$ pues

$x|y| = -|x||y| = -|xy|$

$y|x| = -|y||x| = -|xy|$

luego $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

c) $x \leq 0 < y$,

En este caso tenemos que $x < y$ y además $x|y| \leq 0$ luego $x + x|y| < y + 0$, pero $0 \leq y|x|$ luego

$$x + x|y| < y + y|x| \Leftrightarrow f(x) < f(y) .$$

Por lo tanto, f es creciente. Luego f^{-1} es continua como se quería demostrar.

Problema 14

Sea $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una función tal que $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ para todo $\alpha \in \mathbf{R}$. Probar que f es uniformemente continua en todo $\mathbf{R}$. Encontrar la forma que tienen todas las funciones de este tipo.

Solución

De la propiedad que verifica la función se tiene

$$|f(x) - f(y)| = |f(x \cdot 1) - f(y \cdot 1)| = |xf(1) - yf(1)| =$$

$$= |f(1) \cdot (x - y)| = |f(1)||x - y| .$$

Ahora bien, puede ocurrir que $f(1) = 0$ o que $f(1) \neq 0$.

Si $f(1) = 0$, tenemos que ver que dado $\varepsilon > 0$, existe un δ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$$|f(x) - f(y)| = |f(1)| \cdot |x - y| = 0,$$

luego, para todo $\varepsilon > 0$, tomado $\delta = 1$ se tiene que si $|x - y| < 1$ entonces

$$|f(x) - f(y)| = 0 < \varepsilon .$$

Si $f(1) \neq 0$, tenemos

$$|f(x) - f(y)| = |f(1)| \cdot |x - y| < |f(1)| \cdot \delta,$$

luego, dado $\varepsilon > 0$ y $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|f(1)|}$ se tiene que si $|x - y| < \delta$ entonces

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{|f(1)|} \cdot |f(1)| = \varepsilon .$$

Así pues, la función f es uniformemente continua.

Por otra parte si f tiene la propiedad del enunciado, se cumple que

$$f(x) = x \cdot f(1) = A \cdot x$$

donde $A = f(1)$, luego f es un homomorfismo sobre **R**, que es biyectivo si $A \neq 0$.

Problema 15

Probar que existe una función continua y acotada $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ tal que no alcanza el supremo y el ínfimo. ¿Contradice este ejemplo el teorema de Weierstrass sobre funciones continuas?

Solución

Tomemos la función del Problema 13, $f(x) = \dfrac{x}{1+|x|}$. Como el denominador no se anula la función está bien definida en todo **R.**

Veamos que es continua: como $f(x) = x \cdot \dfrac{1}{1+|x|}$, si probamos que $\dfrac{1}{1+|x|}$ es continua, f lo será, pues es producto de dos funciones continuas.

Pero la función $g(x) = \dfrac{1}{1+|x|}$ es la compuesta de

$$g_1 : \mathbf{R} \to [0,+\infty) \qquad x \to |x|$$

de $$g_2 : [0,+\infty) \to [1,+\infty) \qquad x \to 1+x$$

y de $$g_3 : [1,+\infty) \to \mathbf{R} \qquad x \to \frac{1}{x}$$

que son funciones continuas, luego $g = g_3 \circ g_2 \circ g_1$ es continua.

Por otra parte, 1 es la cota superior de f y -1 es la cota inferior,

$$|f(x)| = \frac{|x|}{1+|x|} < 1$$

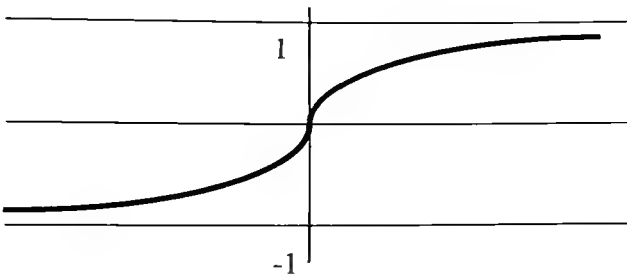
Como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+|x|} = 1$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{1+|x|} = -1$ entonces,

$$1 = \sup\{f(x) : x \in \mathbf{R}\} \quad \text{y} \quad -1 = \inf\{f(x) : x \in \mathbf{R}\} .$$

Ahora bien, no existen $\alpha,\beta \in \mathbf{R}$ tales que $f(\alpha) = 1$ y $f(\beta) = 1$ pues claramente

$$\frac{\alpha}{1+|\alpha|} < 1 \quad \text{y} \quad \frac{\beta}{1+|\beta|} > -1 .$$

El ejemplo no contradice el Teorema de Weierstrass pues $\mathbf{R}$ no es compacto pues no es acotado.



Problema 16

Sea $f:[a,b] \to R$ una función. Probar que son equivalentes:

a) f es continua en $x_0 \in [a,b]$.

b) Para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de elementos de [a,b] que converge a x_0, se tiene que $\lim_{x \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$.

Solución

Veamos que a) implica b) :

Tenemos que comprobar que dado un $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Como f es continua en x_0 , entonces dado un $\varepsilon > 0$ (en particular, el ε anterior) existirá un $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Dado que (x_n) converge a x_0, tenemos que dado el δ anterior, existirá $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ entonces $|x_n - x_0| < \delta$ y por tanto $|f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon$. Luego, $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$.

Veamos ahora que b) implica a):

Supongamos que para toda sucesión (x_n) que converge a x_0 se tiene que $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$. Razonamos por reducción al absurdo.

Si f no fuera continua en x_0 tendríamos que para todo $\delta > 0$ existiría un x_δ tal que $|x_\delta - x_0| < \delta$ y $|f(x_\delta) - f(x_0)| > \varepsilon$. En particular, para $\delta = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbf{N}$, existiría $x_n = x_{\frac{1}{n}}$ tal que $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$ para todo $n \in \mathbf{N}$. Luego x_n converge a x_0, pues dado $\Upsilon > 0$ existirá un n_0 tal que si $\frac{1}{n_0} < \Upsilon$ entonces para todo $n \geq n_0$ tenemos $|x_n - x_0| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \Upsilon$, pero $f(x_n)$ no converge a $f(x_0)$.

Observación: El enunciado de este problema da una de las mejores caracterizaciones para comprobar que una función no es continua en un punto.

Problema 17

Sea f la función definida en [0,1] por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \text{ es racional} \\ 1 - x & \text{si } x \text{ es irracional} \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f.

Solución

Para resolver este problema aplicamos la caracterización expuesta en el Problema 16, es decir, f es continua en x_0 si y sólo si toda sucesión (x_n) que converge a x_0 se tiene que $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$.

Tomada una sucesión (r_n) de números racionales que converge a x_0 y una sucesión (i_n) de números irracionales que converge también a x_0, se tiene:

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} f(r_n) = \lim_{n \to \infty} r_n = x_0$$

y

$$f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(i_n) = \lim_{n\to\infty} (1-i_n) = 1 - \lim_{n\to\infty} i_n = 1 - x_0 .$$

Por tanto, si f es continua en x_0 ha de verificarse que $x_0 = 1 - x_0$, es decir, $x_0 = \frac{1}{2}$. Luego, sólo puede ser continua en $x_0 = \frac{1}{2}$.

Veamos que, en efecto, f es continua en $x_0 = \frac{1}{2}$. Dado un $\varepsilon > 0$, tenemos que encontrar un $\delta > 0$ tal que si $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta$ entonces $\left|f(x) - f(\frac{1}{2})\right| < \varepsilon$.

$$\left|f(x) - f(\tfrac{1}{2})\right| = \left|f(x) - \tfrac{1}{2}\right| = \begin{cases} \left|x - \frac{1}{2}\right| \\ \left|(1-x) - \frac{1}{2}\right| = \left|x - \frac{1}{2}\right| \end{cases} .$$

Por tanto, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$, tenemos que si $\left|x - \frac{1}{2}\right| < \delta$ entonces $\left|f(x) - f(\frac{1}{2})\right| < \varepsilon$, así pues, f es continua en $x_0 = \frac{1}{2}$.

Problema 18

Probar que dadas $f,g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ funciones uniformemente continuas:

a) f+g es uniformemente continua.

b) -f es uniformemente continua.

c) f·g no tiene por qué ser uniformemente continua.

Solución

a) Si f es uniformemente continua se tiene que dado $\varepsilon_1 > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $|x - y| < \delta_1$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon_1$.

Si g es uniformemente continua se tiene que dado $\varepsilon_2 > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $|x - y| < \delta_2$ entonces $|g(x) - g(y)| < \varepsilon_2$.

Tomemos $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2}$ y x,y tales que $|x - y| < \delta$ entonces

$$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| = |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)|$$

$$= |f(x) - f(y) + g(x) - g(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Luego, f+g es uniformemente continua.

b) si f es uniformemente continua se tiene que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

$$|(-f)(x) - (-f)(y)| = |f(y) - f(x)| = |f(x) - f(y)| < \varepsilon ,$$

luego, -f es uniformemente continua.

c) Veamos un contraejemplo.

Sean $f(x) = x$ y $g(x) = x$, veamos que son uniformemente continuas.

Sean x,y tales que $|x-y| < \delta$

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| < \delta ,$$

dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$ se tiene que si $|x - y| < \delta$ entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, así pues, f y g son uniformemente continuas.

Veamos que $f \cdot g(x) = x^2$ no es uniformemente continua.

Supuesto que fuese uniformemente continua, es decir, que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x-y| < \delta$ entonces $|x^2 - y^2| < \varepsilon$. Para x e y de la forma $x = k > 0$, $y = k + \frac{\delta}{2}$ y $\varepsilon = \frac{1}{2}$, entonces

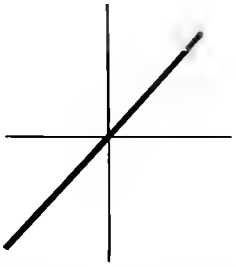
$$|x - y| = \left|k - (k + \frac{\delta}{2})\right| = \left|k - k - \frac{\delta}{2}\right| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

y

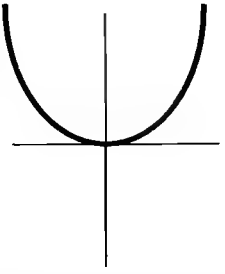
$$\frac{1}{2} = \varepsilon > |x^2 - y^2| = \left|k^2 - (k + \frac{\delta}{2})^2\right| =$$

$$= \left|k^2 - k^2 - \delta k - \frac{\delta^2}{4}\right| = \left|\delta k + \frac{\delta^2}{4}\right| > \delta k .$$

Luego, para $k > \frac{1}{\delta}$ llegamos a que $\frac{1}{2} > \delta k > \delta \cdot \frac{1}{\delta} = 1$ es decir $\frac{1}{2} > 1$ absurdo. Por tanto, f·g no tiene porqué ser uniformemente continua.



$f(x) = x$ es uniforme



$g(x) = x \cdot x = x^2$ no es uniforme

Tema 4

Funciones Derivables

Problema 1

Calcular la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}$, con $x > 0$.

b) $g(x) = \sqrt{Lnx}$, con $x > 1$.

c) $h(x) = e^{x^2 + \text{sen}\,(x^3 + 1)}$.

d) $k(x) = \text{arctg}(\text{sen}x)$.

Solución

a) Se expresa la función de la forma $f(x) = x^{1/8}$, luego $x = [(fx)]^8$ y, por tanto, $1 = 8[f(x)]^7.f'(x)$. Al despejar f' se tiene

$$f'(x) = \frac{1}{8}\frac{1}{[f(x)]^7} = \frac{1}{8}\frac{1}{\sqrt[8]{x^7}}.$$

b) Al aplicar la regla de la cadena se obtiene: $g'(x) = \dfrac{(Lnx)'}{2\sqrt{Lnx}} = \dfrac{1}{2x\sqrt{Lnx}}$.

c) $h'(x) = (x^2 + \text{sen}\,(x^3 + 1))' \cdot e^{x^2 + \text{sen}\,(x^3 + 1)} =$

$$= (2x + 3x^2 \cos(x^3 + 1))\, e^{x^2 + \operatorname{sen}(x^3 + 1)}.$$

$$\text{d) } k'(x) = \frac{(\operatorname{sen} x)'}{1 + \operatorname{sen}^2 x} = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen}^2 x}.$$

Problema 2

Hallar los valores máximo y mínimo absolutos de la función $f:[-1, \frac{1}{2}] \to \mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 1} \quad \text{con } x \in [-1, \tfrac{1}{2}].$$

Solución

La función es derivable en todo **R**, así pues, se aplican las condiciones suficientes sobre la función derivada para encontrar los valores donde la función alcanza los extremos locales, y como es una función continua en un intervalo cerrado se analizan igualmente los valores en los extremos del intervalo.

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - 2x(x + 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2 + 1)^2}.$$

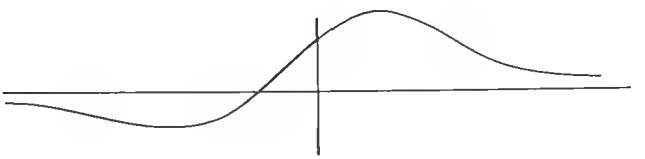
Como $(x^2+1)^2 > 1$, resulta que $f'(x) = 0$ cuando $-x^2-2x+1 = 0$, es decir,

$$f'(x) = 0 \quad \text{si} \quad x = -1 \pm \sqrt{2}.$$

Puesto que $-1-\sqrt{2} \notin [-1, \frac{1}{2}]$ y $-1+\sqrt{2} \in (-1, \frac{1}{2})$, los posibles puntos en los que la función alcanza sus valores máximos ó mínimos absolutos son los puntos $x = -1, x = \frac{1}{2}$ y $x = -1+\sqrt{2}$.

Como $f(-1) = 0$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{6}{5}$ y $f(-1+\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{2}}{4 - 2\sqrt{2}}$ resulta que los valores

máximo y mínimo absolutos de la función f en $[-1,\frac{1}{2}]$ son $\frac{\sqrt{2}}{4-2\sqrt{2}}$ y 0 respectivamente.



Problema 3

Calcular los límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{tgx - senx}{x - senx}$.

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x + senx}$.

Solución

Al aplicar la regla de l´Hôpital a cada uno de los límites se tiene que:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{tgx - senx}{x - senx} = \lim_{x\to 0} \frac{(1+tg^2x) - cosx}{1 - cosx} =$

$= \lim_{x\to 0} \frac{2tgx\,(1+tg^2x) + senx}{senx}$ (aplicando de nuevo l´Hôpital)

$= \lim_{x\to 0} \frac{2\,(1+3tg^2x)\,(1+tg^2x) + cosx}{cosx} = 3.$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{x + senx} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1 + cosx} = \frac{1}{2}.$

Problema 4

Hallar la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos indicados.

a) $f(x) = \sqrt{1 + x^2}$ en $(0,1)$.

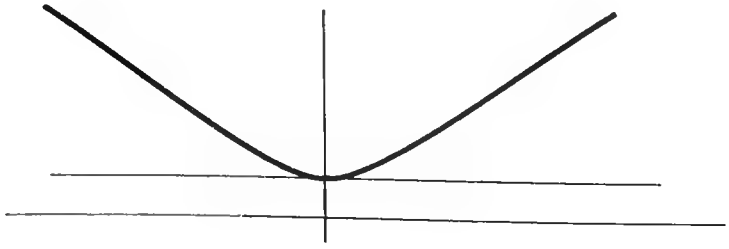
b) $g(x) = \dfrac{1}{2x^2}$ en $(1, \dfrac{1}{2})$ $(x \neq 0)$.

Solución

La pendiente de la recta tangente es la derivada de la función en el punto de tangencia, así pues calculamos las funciones derivadas en los puntos indicados.

a) $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{1 + x^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

Luego la tangente a la gráfica de la función f en el punto $(0,1)$ tendrá por pendiente $f'(0) = 0$ y por la ecuación $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$ dicha tangente es la recta $y = 1$.



b) $g'(x) = -\dfrac{1}{x^3}$ y $g'(1) = -1$.

Por consiguiente la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función g en $(1, \dfrac{1}{2})$ será $y - \dfrac{1}{2} = -1(x - 1)$ ó bien (operando) $2y + 2x - 3 = 0$.

Problema 5

Sea g:**R**→**R** una función derivable en 0 tal que g(0) = g´(0) = 0. Hallar f´(0) donde la función f está definida por

$$f(x) = \begin{cases} g(x)\,\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

Solución

Veamos que aplicando la definición determinamos la derivada:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0.$$

En efecto, para todo $\varepsilon > 0$ por ser

$$g'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{x}$$

existe un $\delta > o$ tal que si $x \neq 0$ y $\delta > |x|$ entonces $\left|\frac{g(x)}{x}\right| < \varepsilon$ y

$$\left|\frac{f(x) - f(0)}{x}\right| = \left|\frac{g(x)\,\text{sen}\frac{1}{x}}{x}\right| = \left|\frac{g(x)}{x}\right|\left|\text{sen}\frac{1}{x}\right| \leq \left|\frac{g(x)}{x}\right| < \varepsilon,$$

por ser $\left|\text{sen}\frac{1}{x}\right| \leq 1$. De esto resulta que f´(0) = 0.

Problema 6

Si de las funciones f,g:$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ se conoce la siguiente tabla de valores:

x	f(x)	f´(x)	g(x)	g´(x)
0	1	−1	2	4
1	3	2	0	0
2	0	5	3	−1
3	2	−3	1	0

Construir la tabla análoga para las funciones $h = g\circ f$ y $k = f\circ g$.

Solución

Como $h(x) = g(f(x))$, $k(x) = f(g(x))$ y al aplicar la regla de la cadena $h'(x) = g'(f(x))\cdot f'(x)$ y $k'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x)$ se tiene que

x	h(x)	h´(x)	k(x)	k´(x)
0	0	0	0	20
1	1	0	1	0
2	2	20	2	3
3	3	3	3	0

Problema 7

Estudiar la derivabilidad de la función valor absoluto $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$.

Solución

Esta función es derivable por ambos lados del origen y es continua en él, sin embargo las derivadas laterales no coinciden; no existe el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Si $x>0$, tomemos $0<|h|<\frac{|x|}{2}$ entonces $|x+h|=x+h$ y se tiene que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1.$$

Si $x<0$, tomemos $0<|h|<\frac{|x|}{2}$ entonces $|x+h|=-(x+h)$ y se tiene que

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{|x+h|-|x|}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-(x+h)-(-x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1.$$

Veamos en $x=0$

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|0+h|-|0|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

luego en $x=0$, la función no es derivable.

Por tanto, $f(x)=|x|$ es derivable en $\mathbf{R}-\{0\}$ y su derivada es $f'(x)=\frac{|x|}{x}$.

Se recomienda interpretar los resultados obtenidos en la gráfica de la

función $f(x)=\sqrt{x^2}$.

Problema 8

Calcular la función derivada de la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & x \le -1 \\ -\sqrt{|x|} & -1 < x \le 0 \\ \sqrt{x} & 0 < x \le 1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & x > 1 \end{cases}$

Solución

Previamente se estudia la continuidad de la función, pues en aquellos puntos en los que la función f(x) no es continua tampoco es derivable. Es obvio que la función es continua en $\{x: x < -1\} \cup \{x: 0 < x < 1\} \cup \{x: x > 1\}$.

En el conjunto $\{x: -1 < x < 0\}$, la función f(x) es composición de las funciones

$$g:(-1,0) \to \mathbf{R} \qquad \text{y} \qquad h:(0,1) \to \mathbf{R}$$

tales que $g(x) = |x|$ con $x \in (-1,0)$ y $h(x) = -\sqrt{x}$ con $x \in (0,1)$, que son continuas, luego f también es continua en $\{x: -1 < x < 0\}$.

Estudiamos la continuidad en los puntos en los cuales f(x) tiene distinta expresión por la derecha y por la izquierda.

En $x = -1$,

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = -1; \quad \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} -\sqrt{|x|} = -1$$

de donde

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = f(-1)$$

y la función es continua en $x = -1$.

En $x = 0$,

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -\sqrt{|x|} = 0$$

de donde

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

luego también es continua en $x = 0$.

En $x = 1$,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \sqrt{x} = 1 \; ; \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} = 1$$

de donde

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) .$$

La función f es continua en todo **R**. Por tanto puede ser derivable en todo **R**, de hecho en los conjuntos anteriormente mencionados ó es polinómica ó es derivable claramente, bien por ser inversa de una función derivable (en $0 < x < 1$) ó por ser composición de funciones derivables (en $-1 < x < 0$). Inicialmente, se puede considerar la función siguiente como la función derivada :

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad x < -1 \\ \frac{1}{2\sqrt{|x|}} & \text{si} \quad -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases} .$$

En $-1 < x < 0$,

$$f(x) = h \circ g(x)$$

donde h y g son las funciones establecidas en la primera parte del problema, entonces

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$$

pero $h'(g(x)) = \frac{-1}{2\sqrt{|x|}}$ y $g'(x) = -1$.

Queda estudiar la derivabilidad en los puntos $x = -1, x = 0$ y $x = 1$.

En $x = -1$,

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{(\frac{1}{2}(-1+h)-\frac{1}{2})-(\frac{1}{2}(-1)-\frac{1}{2})}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{\frac{1}{2}h}{h}=\frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{-\sqrt{|-1+h|}-(\frac{1}{2}(-1)-\frac{1}{2})}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{-\sqrt{1-h}+1}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(1-\sqrt{1-h})\,(1+\sqrt{1-h})}{h\,(1+\sqrt{1-h})}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1-(1-h)}{h\,(1+\sqrt{1-h})}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h\,(1+\sqrt{1-h})}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{1+\sqrt{1-h}}=\frac{1}{2}.$$

Luego la función es derivable en $x=-1$ y su derivada es $\frac{1}{2}$.

En $x=1$,

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{1+h}-1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{(\sqrt{1+h}-1)\,(\sqrt{1+h}+1)}{h\,(\sqrt{1+h}+1)}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1+h-1}{h\,(\sqrt{1+h}+1)}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}=\frac{1}{2}$$

y

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{(\frac{1}{2}(1+h)+\frac{1}{2})-1}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}h}{h}=\frac{1}{2}.$$

Luego la función es derivable en $x=1$ y su derivada es $\frac{1}{2}$.

En $x=0$,

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-\sqrt{|h|}}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{|h|}}{-h}=$$

$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{|h|}}{|h|}=\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{|h|}}{\sqrt{|h|}\sqrt{|h|}}=\lim_{h\to 0^-}\frac{1}{\sqrt{|h|}}=+\infty$$

y

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h}}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{h}}=+\infty$$

luego f no es derivable en $x=0$.

Por tanto, la función derivada es

$$f'(x)=\begin{cases}\frac{1}{2} & x\le -1\\ \frac{1}{2\sqrt{|x|}} & -1<x<0\\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0<x\le 1\\ \frac{1}{2} & x>1\end{cases}.$$

Problema 9

Calcular la derivada segunda $f''(x)$ de la función $f(x) = \dfrac{3x^2+5}{(x-1)(x-2)}$ definida en $\mathbf{R}-\{1,2\}$.

Solución

Hallamos la primera derivada, puesto que f(x) es una función 1 derivable salvo en los puntos donde se anula el denominador, según resulta de las reglas usuales de derivación.

$$f'(x) = \frac{6x(x-1)(x-2) - (3x^2+5)[(x-1+x-2)]}{(x-1)^2(x-2)^2} =$$

$$= \frac{6x^3 - 18x^2 + 12x - 6x^3 + 9x^2 - 10x + 15}{(x-1)^2(x-2)^2} = \frac{-9x^2 + 2x + 15}{(x-1)^2(x-2)^2}$$

que es una función definida en $\mathbf{R}-\{1,2\}$ y derivable.

Hallemos la segunda derivada derivando la función derivada anterior:

$$f''(x) = \frac{(-18x+2)(x-1)^2(x-2)^2}{(x-1)^4(x-2)^4} -$$

$$- \frac{(-9x^2+2x+15)[2(x-1)(x-2)^2 + 2(x-2)(x-1)^2]}{(x-1)^4(x-2)^4} =$$

$$\frac{(-18x+2)(x-1)(x-2) - (-9x^2+2x+15)[2(x-2)+2(x-1)]}{(x-1)^3(x-2)^3}$$

$$= \frac{-18x^3 + 56x^2 - 42x + 4 - (-36x^3 + 62x^2 + 48x - 90)}{(x-1)^3(x-2)^3} =$$

$$= \frac{18x^3 - 6x^2 - 90x + 94}{(x-1)^3(x-2)^3},$$

que está definida en $\mathbf{R}-\{1,2\}$.

Problema 10

Probar que la recta y = -x es tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3-6x^2+8x$ en algún punto. Hallar el punto de tangencia y estudiar si esta tangente corta a la gráfica en otro punto distinto al de punto de tangencia.

Solución

Como la derivada de una función en un punto x_0 es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0,f(x_0))$, y la recta y = -x tiene por pendiente -1, vamos a calcular los puntos para los cuales $f'(x) = -1$.

$$f'(x) = 3x^2-12x+8$$

$$3x^2-12x+8 = -1$$

$$3x^2-12x+9 = 0$$

$$x^2-4x+3 = 0$$

que tiene por raíces $x = 1$ y $x = 3$.

Calculemos las rectas tangentes a la gráfica en los puntos $(1,f(1)) = (1,3)$ y $(3,f(3)) = (3,-3)$,

$$y-3 = -1(x-1)$$

$$y = -x+4$$

luego la recta y = -x no es tangente a la gráfica de la función f en el punto (1,3). Por otra parte,

$$y-(-3) = -1(x-3)$$

$$y = -x$$

y, por tanto, el punto buscado es el (3,-3).

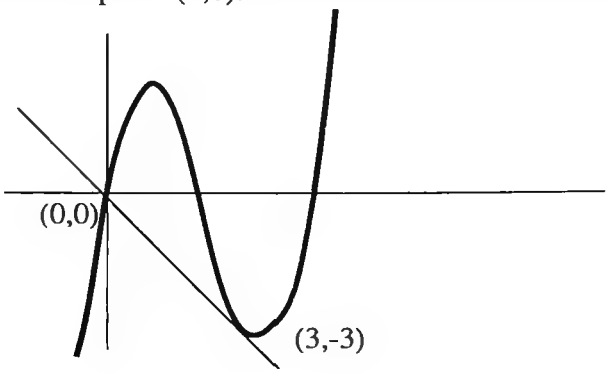
Veamos si la recta y = -x corta a la gráfica en algún otro punto; para esto resolvamos el sistema:

$$\begin{cases} y = -x \\ y = x^3 - 6x^2 + 8x \end{cases}$$

igualando las ecuaciones y resolviendo se obtiene:

$$-x = x^3-6x^2+8x \quad , \quad x^3-6x^2+9x = 0 \quad , \quad x(x^2-6x+9) = 0 \quad , \quad x(x-3)^2 = 0,$$

luego en $x = 0$, existe otra raíz, por tanto la recta $y = -x$ corta a la gráfica de la función f también en el punto (0,0).



Problema 11

Hallar la derivada por la derecha en el punto $x = 0$ de las funciones

$$f_1(x) = \sqrt{x} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \sqrt[3]{x} \quad \text{para } x \geq 0.$$

Solución

Calculemos la derivada por la derecha en 0:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f_1(0+h) - f_1(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h} - 0}{h} =$$

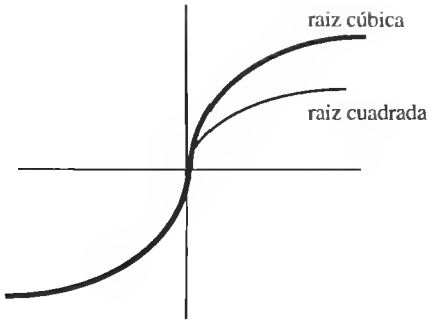
$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty .$$

Esto indica que la recta tangente por la derecha en el punto 0, es la recta vertical $x = 0$.

Análogamente, calculemos de la función $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$ en $x = 0$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f_2(0+h) - f_2(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

y la recta tangente es $x = 0$.



Observación: Se puede definir la derivada infinita en un punto, como la pendiente de la recta vertical tangente en dicho punto.

Problema 12

Un móvil en trayectoria rectilínea sigue la siguiente ley:

$$e(t) = 2t^3 - 9t^2 + 12t + 5$$

donde e(t) es el espacio recorrido y se mide en kilómetros, y t es el tiempo empleado y se mide en segundos. Calcúlese la función velocidad v(t) y la función aceleración .Calcular la velocidad y aceleración en los instantes $t = 0$ y $t = 2$.

Solución

La derivada de e(t) es la función velocidad, luego

$$v(t) = e'(t) = 6t^2 - 18t + 12.$$

La derivada de v(t) es la función celeración,

$$a(t) = v'(t) = 12t - 18.$$

En los instantes $t = 0$ y $t = 2$ se tiene que:

$v(0) = 12$, $a(0) = -18$ (el móvil está frenado).

$v(2) = 0$, $a(2) = 6$ (el móvil está parado y acelerado).

Problema 13

Descubrir cúal de los siguientes cálculos es erróneo y dar la equivocación cometida.

a) $$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x-1)}{x(x-2)(x+2)} = \lim_{x \to 2} \frac{x-1}{x(x+2)} = \frac{1}{8} .$$

b) Al aplicar la regla de l´Hôpital se obtiene

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x} = \lim_{x \to 2} \frac{2x-3}{3x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{2}{6x} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} .$$

Solución

El límite en a) es correcto.

El límite en b) es erróneo porque se ha aplicado la regla de l´Hôpital en el segundo límite que no presentaba indeterminación

$$\lim_{x \to 2} \frac{2x-3}{3x^2 - 4} = \frac{1}{3 \cdot 4 - 4} = \frac{1}{8} .$$

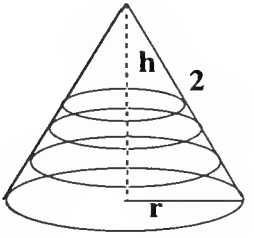
Nota: Observese que la regla de l´Hôpital se puede utilizar únicamente si se produce indeterminación y la expresión del límite se puede expresar como un cociente.

Problema 14

Hallar el radio de la base de un recipiente cónico de generatriz 2 cm. de modo que su capacidad sea máxima.

Solución

Denotamos por r el radio de la base, por g la generatriz del cono y por h la altura. Sabemos que $g^2 = h^2 + r^2$ de donde $h = \sqrt{g^2 - r^2} = \sqrt{4 - r^2}$.



Por otra parte la función capacidad de dicho cono (volumen) en función del radio de la base es:

$$C(r) = \frac{\pi r^2}{3}\sqrt{4-r^2}.$$

Hallamos el máximo analizando las derivadas de la función C(r).

$$C'(r) = \frac{1}{3}\pi\left(2r\sqrt{4-r^2} + \frac{(-2r)\,r^2}{2\sqrt{4-r^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi r\left(2\sqrt{4-r^2} - \frac{r^2}{\sqrt{4-r^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi r\left(\frac{2\,(4-r^2) - r^2}{\sqrt{4-r^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\pi r\left(\frac{8-3r^2}{\sqrt{4-r^2}}\right).$$

La ecuación $c'(r) = 0$ se cumple si $r = 0$ (esta solución está descartada pues el radio de la base no puede ser cero en ningún recipiente) ó si $8\text{-}3r^2 = 0$, de donde $r = \sqrt{\frac{8}{3}}$.

Veamos si este punto es máximo. Como el cálculo de la segunda derivada sería largo, estudiamos el signo de la primera derivada, si $0 < r < \sqrt{\frac{8}{3}}$, $c'(r) > 0$, luego c(r) es creciente a la izquierda del punto $r = \sqrt{\frac{8}{3}}$ y si $r > \sqrt{\frac{8}{3}}$, $c'(r) < 0$, luego c(r) es decreciente a la derecha de $r = \sqrt{\frac{8}{3}}$, por tanto la función tiene un máximo cuando el radio es $\sqrt{\frac{8}{3}}$ cm.

Problema 15

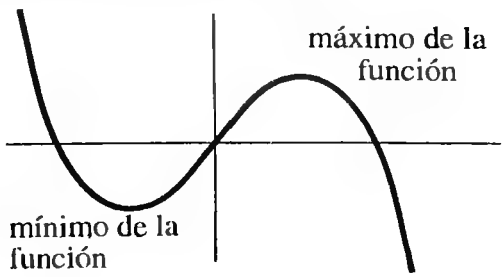
Comprobar que la función $f(x) = x\text{-}x^3$ satisface las condiciones del teorema de Rolle en los segmentos $-1 \leq x \leq 0$ y $0 \leq x \leq 1$. Hallar los valores correspondientes de c en los que se cumple dicho teorema.

Solución

La función polinómica f(x) es continua en todo **R** y, por tanto, también lo es en los intervalos [−1,0] y [0,1]. Además, f(1) = f(-1) = f(0) = 0 y f(x) es derivable en todo **R**, luego también en (-1,0), (0,1). Por el teorema de Rolle existe $c_1 \in (0,1)$ y $c_2 \in (-1,0)$ tales que

$$f'(c_1) = 0 \quad \text{y} \quad f'(c_2) = 0.$$

Los puntos que anulan a $f'(x) = 1\text{-}3x^2 = 0$ son $c_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ y $c_2 = \frac{-1}{\sqrt{3}}$. Estos son los puntos que el teorema de Rolle asegura.



Problema 16

Sea f una función continua en [0,1] y derivable en (0,1) tal que, $f'(a) \in (0,1)$ para todo $a \in (0,1)$. Probar que existe un único $x_0 \in (0,1)$ tal que $f(x_0) = x_0$.

Solución

Consideramos la función $g(x) = f(x) - x$ que es continua en [0,1] por ser diferencia de dos funciones continuas. Además,

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) > 0 \quad \text{pues } f(0) \in (0,1)$$

y

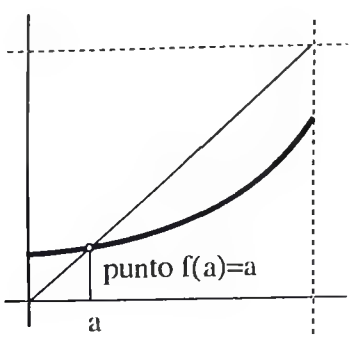
$$g(1) = f(1) - 1 < 0 \quad \text{pues } f(1) \in (0,1).$$

Por el teorema de Bolzano existe al menos $x_0 \in (0,1)$ tal que $g(x_0) = 0$ luego $f(x_0) = x_0$.

Supongamos que existen $x_0, x_1 \in (0,1)$ tales que $f(x_0) = x_0$ y $f(x_1) = x_1$ y $x_0 < x_1$, (en el caso de ser $x_0 > x_1$ se se procede de forma análoga). Por el teorema del valor medio existirá $c \in (x_0, x_1) \subset (0, 1)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = 1$$

y esto contradice la hipótesis $f'(c) \in (0,1)$.



Problema 17

Hallar los siguientes límite:

a) $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}{x^2}$.

b) $\lim_{x \to 0^+} x\,(\mathrm{Ln}x)^n$.

c) $\lim_{x \to 0^+} e^{-1/x}$.

d) $\lim_{x \to 0} \dfrac{2\,(1 - \cos x)}{x^2}$.

e) $\lim_{x \to 0} \dfrac{\mathrm{sen}5x\,\mathrm{sen}7x}{(x - x^2)^2}$.

f) $\lim_{x \to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^3}}$.

Solución

a) Al intentar aplicar las propiedades algebraicas de los límites surge la indeterminación $\dfrac{0}{0}$, por tanto, aplicamos reiteradamente la regla de L´Hopital para reducir esta indeterminación y obtener el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \dfrac{x^2}{2}}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2} = 0.$$

b) La indeterminación que aparece $0 \cdot \infty$, nos induce a modificar la expresión y aplicar la regla de l´Hôpital. Se procede por inducción:

Para $n = 1$,

$$\lim_{x \to 0^+} x\,(Lnx) = \lim_{x \to 0^+} \frac{Lnx}{1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0\,.$$

Supuesto que es cierto para n-1, $\lim_{x \to 0^+} x\,(Lnx)^{n-1} = 0$, veamos que es cierto para n.

$$\lim_{x \to 0^+} x\,(Lnx)^n = \lim_{x \to 0^+} \frac{(Lnx)^n}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(Lnx)^{n-1} n \cdot \frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} x\,(-n)\,(Lnx)^{n-1} = -n \cdot 0 = 0\,.$$

Luego en efecto, $\lim_{x \to 0^+} x\,(Lnx)^n = 0$, para todo n.

c) $$\lim_{x \to 0^+} e^{-1/x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{e^{1/x}} = \frac{1}{\lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0.$$

d) Aplicamos la regla de l´Hôpital para salvar la indeterminación:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\,(1 - \cos x)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\,\mathrm{sen}x}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}x}{x} = \lim_{x \to 0} \cos x = 1\,.$$

e) Calculamos primero los siguientes límites

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}5x}{5x} = \lim_{x \to 0} \frac{5\cos 5x}{5} = 1\ ,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\mathrm{sen}7x}{7x} = \lim_{x \to 0} \frac{7\cos 7x}{7} = 1$$

y

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x - x^2)^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2\,(x - x^2)\,(1 - 2x)}{2x} = 1\,.$$

La expresión de nuestro límite la escribimos de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}5x\operatorname{sen}7x}{(x-x^2)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}5x}{5x}\cdot 5x\cdot\dfrac{\operatorname{sen}7x}{7x}\cdot 7x}{\dfrac{(x-x^2)^2}{x^2}\cdot x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}5x}{5x}\dfrac{\operatorname{sen}7x}{7x}}{\dfrac{(x-x^2)^2}{x^2}}\lim_{x\to 0}\frac{35x^2}{x^2}=1\cdot 35=35.$$

f) Al aplicar las propiedades de la función logaritmo se tiene:

$$\lim_{x\to 0^+}\operatorname{Ln}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{Ln}(\cos 3x)}{x^3}.$$

Como se produce indeterminación aplicamos la regla de l'Hôpital dos veces:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{Ln}(\cos 3x)}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\cos 3x}\cdot(-3)\operatorname{sen}3x}{3x^2}=$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{\operatorname{sen}3x}{\cos 3x}}{x^2}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{tg}3x}{x^2}=$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{\dfrac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3}{2x}=-\frac{3}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos^2 3x}{x}=-\infty,$$

luego

$$\lim_{x\to 0^+}(\cos 3x)^{\frac{1}{x^3}}=e^{-\infty}=0.$$

Problema 18

Hallar las expresiones de las derivadas de las siguientes funciones

a) $f(x) = 4^{\text{sen}^2(2x)} \cdot \text{Ln}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$.

b) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\frac{-(x^2+1)^3}{\text{tg}x}}$.

Solución

a) Aplicamos la regla de derivación del producto de funciones y la regla de la cadena:

$$f'(x) = 4^{\text{sen}^2(2x)} \cdot \text{Ln}4 \cdot 2\text{sen}(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 \cdot \text{Ln}\left(\frac{x^2-1}{x}\right) +$$

$$+ \; 4^{\text{sen}^2(2x)} \cdot \frac{\frac{2x \cdot x - 1(x^2-1)}{x^2}}{\frac{x^2-1}{x}} =$$

$$= 4 \cdot \text{Ln}4 \cdot 4^{\text{sen}^2(2x)} \cdot \text{sen}(2x) \cdot \cos(2x) \cdot \text{Ln}\left(\frac{x^2-1}{x}\right) +$$

$$+ \frac{4^{\text{sen}^2(2x)} \cdot (x^2+1)}{x(x^2-1)}.$$

b) Aplicamos la regla de la cadena,

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{-(x^2+1)^3}{tgx}} \cdot \frac{-3(x^2+1)^2(2x)\,tgx + \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (x^2+1)^3}{tg^2 x} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{-(x^2+1)^3}{tgx}} \cdot \left(\frac{-6x(x^2+1)^2}{tgx} + \frac{(x^2+1)^3}{\cos^2 x\, tg^2 x} \right).$$

Tema 5

Fórmula de Taylor y aplicaciones

Problema 1

Calcular $\operatorname{sen} x$ con un error menor o igual que $\frac{1}{720}$, para $x \in (0,1)$.

Solución

Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$, para cada $x \in (0,1)$ aplicando la fórmula de Taylor a la función f se tiene que:

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 0 + \frac{1}{1!} f'(0)\, x + \frac{1}{2!} f''(0)\, x^2 + \frac{1}{3!} f^{(3)}(0)\, x^3 +$$

$$\frac{1}{4!} f^{(4)}(0)\, x^4 + \frac{1}{5!} f^{(5)}(0)\, x^5 + E_5(x) \ .$$

con

$$|E_5(x)| = \frac{1}{6!} |f^{(6)}(c)| |x|^6$$

para algún $c \in (0,x)$.

Como $\operatorname{sen} 0 = 0$,

$$f'(y) = \cos y \quad , \quad f'(0) = 1$$

$$f''(y) = -\operatorname{sen} y \quad , \quad f''(0) = 0$$

$$f^{(3)}(y) = -\cos y \quad , \quad f^{(3)}(0) = -1$$

$$f^{(4)}(y) = \operatorname{sen} y \ , \quad f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(y) = \cos y \ , \quad f^{(5)}(0) = 1$$

$$f^{(6)}(y) = -\operatorname{sen} y \ .$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + E_5(x) \ .$$

Si tomamos $\operatorname{sen} x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$, el error cometido para cada valor x es:

$$|E_5(x)| = \frac{1}{6!}|-\operatorname{sen} c||x|^6 \leq \frac{1}{720} \ ,$$

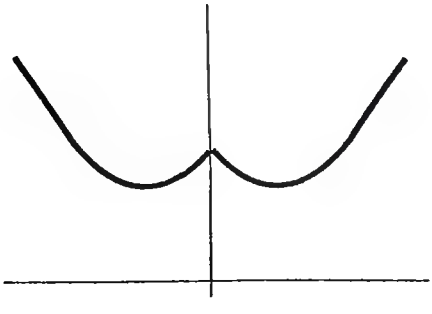
ya que $|-\operatorname{sen} c| = |\operatorname{sen} c| \leq 1$ y $|x|^6 \leq 1$ por ser $x \in (0,1)$.

Problema 2

Hallar los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^2 - |x| + 2$.

Solución

La función f se puede definir también de la siguiente manera:



$f(x) = x^2 - \sqrt{x^2} + 2$, si bien es más frecuente la expresión siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Consideremos las funciones

$$f_1:(-\infty,0)\to\mathbf{R} \qquad \text{y} \qquad f_2:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$$

$$f_1(x) = x^2+x+2 \qquad f_2(x) = x^2-x+2\,.$$

Como estas funciones son diferenciables en sus dominios, aplicamos las condiciones sobre las funciones derivadas que son condiciones suficientes para la existencia de máximo y mínimo.

$$f'_1(x) = 2x+1 \quad (x<0) \qquad \text{y} \qquad f'_2(x) = 2x-1 \quad (x>0)$$

se anulan en $x_1 = -\frac{1}{2}$ y $x_2 = \frac{1}{2}$ respectivamente y

$$f''_1(-\tfrac{1}{2}) = 2>0 \qquad \text{y} \qquad f''_2(\tfrac{1}{2}) = 2>0\,,$$

resulta que la función f tiene un mínimo relativo en $x = -\frac{1}{2}$ y otro en $x = \frac{1}{2}$.

En $x = 0$ la función f es continua pero no es derivable en este punto, por lo tanto no pueden aplicarse las anteriores condiciones, debemos utilizar la definición directamente. Consideramos un entorno $(-\varepsilon,\varepsilon)$ del punto 0 con $\varepsilon>0$ suficientemente pequeño, entonces

$$f'(x) = 2x+1>0 \text{ si } x\in(-\varepsilon,0)\,,$$

$$f'(x) = 2x-1<0 \text{ si } x\in(0,\varepsilon)\,,$$

luego, f es creciente en $(-\varepsilon,0)$ y decreciente en $(0,\varepsilon)$. En consecuencia, $x=0$ es un punto máximo relativo de la función f.

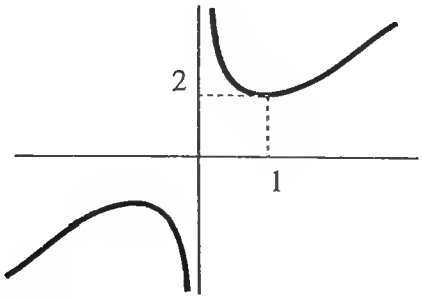
Problema 3

Demostrar que la suma de un número real mayor que cero y su inverso no es menor que 2.

Solución

Consideremos la función $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ definida por

$$f(x) = x + \frac{1}{x} \qquad (x > 0) \quad .$$



Entonces, su derivada es

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \qquad (x > 0)$$

y se anula, $f'(x) = 0$ cuando $x = \pm 1$.

Como $-1 < 0$, la única solución a considerar es $x = 1$ y puesto que $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ resulta que $f''(x) > 0$ si $x > 0$ y, por tanto, tiene un mínimo en $x = 1$. Por tanto $f(x) = x + \frac{1}{x} \geq f(1) = 2$ para todo $x > 0$.

Problema 4

Hallar la derivada n-ésima de la función $h(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$.

Solución

La función f está definida en $\mathbf{R}-\{-1\}$ y es derivable sucesivamente en dicho dominio por ser cociente de funciones derivables y no anularse el denominador.

Es conveniente escribir esta función como potencia antes de proceder a derivar sucesivamente.

$$h(x) = (x+1)^{-2}$$

$$h'(x) = -2(x+1)^{-2-1} = (-1)\cdot 2\cdot (x+1)^{-3}$$

$$h''(x) = (-2)(-3)(x+1)^{-4} = (-1)^2\cdot 2\cdot 3\cdot (x+1)^{-4}$$

$$h'''(x) = (-2)(-3)(-4)(x+1)^{-5} = (-1)^3\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot (x+1)^{-5}$$

...

$$h^{(n}(x) = (-1)^n\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot (n+1)\cdot (x+1)^{-n-2} =$$

$$= \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x+1)^{n+2}} .$$

Problema 5

Hallar la derivada n-ésima de la función $h(x) = \dfrac{x+2}{(x+1)^2}$.

Solución

La función h esta definida en $\mathbf{R}-\{-1\}$ y es derivable sucesivamente en dicho dominio por ser cociente de funciones derivables y no anularse el denominador.

Es conveniente escribir esta función como un producto de dos funciones antes de proceder a derivar sucesivamente.

$$h(x) = f(x)\cdot g(x),$$

donde $f(x) = (x+2)$ y $g(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$, si $x \neq -1$.

Por la fórmula de Leibnitz se obtiene la expresión de la derivada n-ésima

$$h^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x)\, g^{(n-k)}(x) ,$$

y como $f(x) = x + 2$

$f'(x) = 1$

$f''(x) = 0$

resulta que

$$h^{(n)}(x) = \binom{n}{0} f(x) \cdot g^{(n)}(x) + \binom{n}{1} f'(x) \cdot g^{(n-1)}(x) .$$

Basta obtener del Problema 4 las expresiones de las derivadas n-ésimas de la función g,

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x+1)^{n+2}} \quad \text{y} \quad g^{(n-1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1} n!}{(x+1)^{n+1}} ,$$

entonces,

$$h^{(n)}(x) = (x+2) \cdot \frac{(-1)^n (n+1)!}{(x+1)^{n+2}} + n \cdot \frac{(-1)^{n-1} n!}{(x+1)^{n+1}} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} n!}{(x+1)^{n+1}} \left[n - \frac{(x+2)(n+1)}{x+1} \right] .$$

Problema 6

Determinar los máximos y los mínimos relativos y absolutos de la función:

$$k(x) = |x|^3 \quad \text{en } [-1,1] .$$

Solución

La expresión explícita de la función es:

$$k(x) = |x|^3 = \begin{cases} x^3 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -x^3 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Esta función es continua en todo **R** y en particular su restricción al intervalo cerrado [-1,1], así pues, la función k alcanza un valor máximo y mínimo absoluto en el intervalo compacto [-1,1] . Estos valores se alcanzan o en un máximo o mínimo relativo o en los extremos del intervalo.

La función es derivable en todo **R**. Veamos que es derivable en $x = 0$:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{k(0+h) - k(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^3}{h} = \lim_{h \to 0^+} h^2 = 0$$

y

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{k(0+h) - k(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} -\frac{h^3}{h} = \lim_{h \to 0^-} -h^2 = 0 \quad ,$$

luego k(x) es derivable en (-1,1) y

$$k'(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -3x^2 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Veamos si $k'(x)$ es derivable en $x = 0$:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{k'(0+h) - k'(0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{3h^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} 3h = 0$$

y

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{k'(0+h) - k'(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-3h^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} -3h = 0$$

luego $k'(x)$ es derivable en (-1,1) y

$$k''(x) = \begin{cases} 6x & \text{si} \quad x \geq 0 \\ -6x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

Como la función es dos veces derivable, calculamos los máximos y mínimos relativos haciendo uso de las condiciones suficientes sobre la derivada primera.

Se determinan los puntos que anulan a la primera derivada; la ecuación $k'(x) = 0$ tiene como raiz $x = 0$. En este caso $k''(0) = 0$ con lo que no

podemos usar el criterio del signo de la derivada segunda para averiguar si en $x = 0$ hay máximo o mínimo relativo.

La función es positiva para todo valor distinto del cero, es decir, si $0 < |x-0| < \delta$ entonces $k(x) > 0$, luego $k(x)$ tiene un mínimo en $x = 0$.

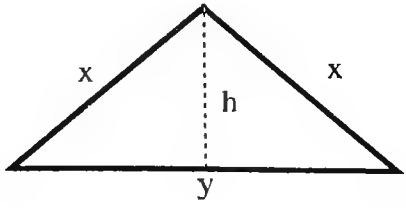
Los máximos y mínimos absolutos se presentan, pues, o en $x = 1$ o en $x = -1$ o en $x = 0$. Pero $k(1) = 1$ y $k(-1) = 1$, luego el mínimo absoluto está en $x = 0$ y los máximos absolutos en los extremos del intervalo de definición.

Problema 7

Hallar los lados del triángulo isósceles de perímetro 1 que tiene área máxima.

Solución

Denotemos por x la longitud de los lados iguales del triángulo isosceles y la longitud del otro lado por y.



El perímetro es $P = 2x+y$, luego, se tiene $2x + y = 1$, por tanto $y = 1 - 2x$.

La altura del triángulo es

$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - \left(\frac{1-2x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4x-1}{4}}.$$

El área del triángulo en función de x es

$$A(x) = \frac{1}{2} y \cdot h = \frac{1}{2}(1-2x)\sqrt{\frac{4x-1}{4}} = \left(\frac{1}{2} - x\right)\sqrt{x - \frac{1}{4}}.$$

Tan sólo debemos determinar los valores que maximizan a la función área, función que es derivable. Calculemos la derivada de A(x):

$$A'(x) = (-1)\sqrt{x-\frac{1}{4}} + \frac{\frac{1}{2}-x}{2\sqrt{x-\frac{1}{4}}} = \frac{(-2)\,(x-\frac{1}{4}) + \frac{1}{2} - x}{2\sqrt{x-\frac{1}{4}}} =$$

$$= \frac{-2x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-x}{2\sqrt{x-\frac{1}{4}}} = \frac{-3x+1}{2\sqrt{x-\frac{1}{4}}}.$$

La función derivada se anula, $A'(x) = 0$, en $x = \frac{1}{3}$. Calculamos la segunda derivada

$$A''(x) = \frac{(-3)\,(2\sqrt{x-\frac{1}{4}}) - (-3x+1)\left(\frac{2}{2\sqrt{x-\frac{1}{4}}}\right)}{4\,(x-\frac{1}{4})} =$$

$$= \frac{(-6)\,(x-\frac{1}{4}) + 3x - 1}{4\,(x-\frac{1}{4})\sqrt{x-\frac{1}{4}}} = \frac{-3x+\frac{1}{2}}{4\,(x-\frac{1}{4})^{3/2}}.$$

El signo de $A''(x)$ para $x = \frac{1}{3}$,

$$A''(\tfrac{1}{3}) = \frac{-3\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{4\,(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})^{3/2}} = -3\sqrt{3} < 0,$$

indica que en $x = \frac{1}{3}$ la función área alcanza un máximo.

Por tanto las dimensiones de los lados son $x = \frac{1}{3}$, $y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$, es

decir el triángulo es equilátero.

Problema 8

La derivada de la función f(x) es $f'(x) = x^2 - 4x$.

a) ¿En qué intervalos es creciente la función f ? y ¿decreciente?.

b) ¿Donde es cóncava la función f y donde es convexa?.

c) Hallar los extremos relativos y los puntos de inflexión.

Solución

a) Como la función es derivable, aplicamos las condiciones suficientes sobre la derivada de la función para estudiar el crecimiento y decrecimiento. Inicialmente se determinan los puntos donde la función derivada es estrictamente mayor o menor que 0.

$$f'(x) = x^2 - 4x = x(x-4) .$$

La función derivada es una función continua, entonces para cambiar de signo debe existir un punto donde se anule. Se anula en $x = 0$ y $x = 4$.

Si $x < 0$, $f'(x) > 0$ luego $f(x)$ es creciente.

Si $0 < x < 4$, $f'(x) < 0$ luego $f(x)$ es decreciente.

Si $x > 4$, $f'(x) > 0$ luego $f(x)$ es creciente.

b) Como la función es derivable dos veces, aplicamos las condiciones suficientes sobre la derivada segunda de la función para estudiar la concavidad y convexidad. Inicialmente se determinan los puntos donde la función derivada es estrictamente mayor o menor que 0.

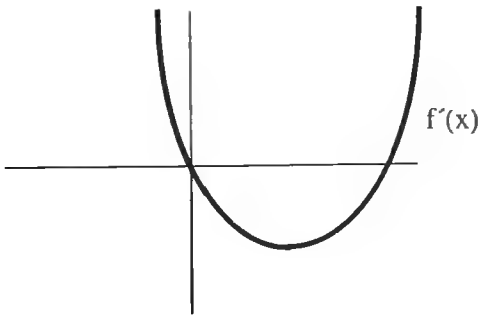
$$f''(x) = 2x - 4 = 2(x-2) .$$

La función derivada segunda es una función continua, entonces para cambiar de signo debe existir un punto donde se anule. Se anula en $x = 2$.

Si $x < 2$, $f''(x) < 0$ luego $f(x)$ es cóncava.

Si $x > 2$, $f''(x) > 0$ luego $f(x)$ es convexa.

c) Por el apartado a) se comprueba que $f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = 0$, pues la función cambia de creciente a decreciente, y un mínimo relativo en $x = 4$, puesto que se produce el cambio de decreciente a creciente. Además, por el apartado b) se observa que en $x = 2$ la función f tiene un punto de inflexión pues la función cambia de cóncava a convexa.



Problema 9

Hallar máximos y mínimos, absolutos y relativos, intervalos de concavidad y convexidad, intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2+1 & \text{si} \quad x \le -2 \\ (x+2) & \text{si} \quad -2 < x \le 1 \\ (x-1)^2+3 & \text{si} \quad 1 \le x \end{cases}$$

Hacer un diagrama de la función.

Solución

La función es continua en todo punto y derivable en $(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)$, pues en cada uno de esos intervalo abiertos tiene una expresión polinómica y también es continua en los puntos $x = -2$ y $x = 1$, puesto que los límites laterales coinciden y son iguales al valor que toma la función en ellos.

En $x = -2$, f no es derivable puesto que las derivadas laterales no coinciden

$$f'_{-}(-2) = \lim_{x \to -2^-} \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} =$$

$$= \lim_{x \to -2^-} \frac{[-(x+3)^2+1]-0}{x+2} = \lim_{x \to -2^-} -2(x+3) = -2 .$$

$$f'_+(-2) = \lim_{x \to -2^+} \frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)} = \lim_{x \to -2^+} \frac{x+2}{x+2} = 1 .$$

En $x = 1$, f no es derivable puesto que las derivadas laterales no coinciden

$$f'_-(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x+2)-3}{(x-1)} = 1 .$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{(x-1)^2+3-3}{x-1} = \lim_{x \to 1^+} x-1 = 0 .$$

Por tanto, la expresión de la función derivada es

$$f'(x) = \begin{cases} -2(x+3) & \text{si} \quad x < -2 \\ 1 & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ 2(x-1) & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

y la expresión de la función $f''(x)$ es

$$f''(x) = \begin{cases} -2 & \text{si} \quad x < -2 \\ 0 & \text{si} \quad -2 < x < 1 \\ 2 & \text{si} \quad 1 < x \end{cases}$$

Luego, en $(-\infty,-2)$ la función es cóncava, en $(1,+\infty)$ es convexa y en $(-2,1)$ es una recta.

Veamos los ceros de $f'(x)$: $x = -3$ es el único punto donde se anula la derivada primera y como $f''(-3) = -2 < 0$, entonces en $x = -3$ hay un máximo relativo.

Debido a que la función no es derivable en $x = -2$ y $x = 1$, hay que estudiar la existencia de extremos relativos haciendo uso de la definición.

En $x = -2$, la función f(x) se anula. Pero en un entorno de dicho punto, por ejemplo (-3,-1) la función es estrictamente positiva, luego la función tiene un mínimo relativo en $x = -2$.

En $x = 1$, la función f(x) toma el valor 3, pero

$$\text{si } y \in (0,1) \text{ es } f(y) = y+2 < 3,$$

$$\text{si } y \in (1,2) \text{ es } f(y) = (y-1)^2 + 3 > 3,$$

luego no hay máximo ni mínimo relativo en $x = 1$.

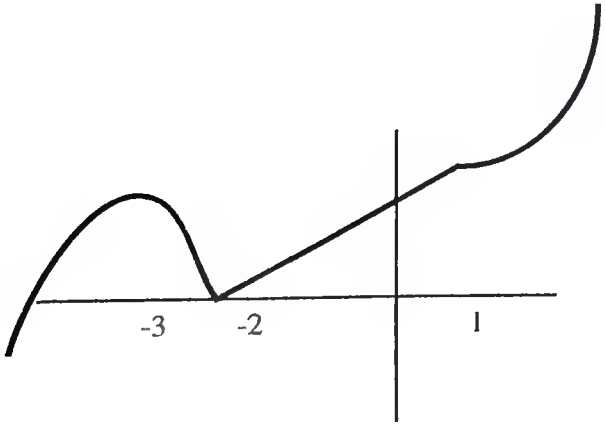
Para estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento estudiamos el signo de f´(x), para ello tenemos en cuenta que la función f´ no es continua y que se anula en $x = -3$. Asi pues, el signo de la función derivada es constante en cada intervalo $(-\infty,-3),(-3,-2),(-2,1)$ y $(1,\infty)$.

$$\text{sig } f'(x) = \begin{cases} \text{positivo} & \text{si} & x < -3 \\ \text{negativo} & \text{si} & -3 < x < -2 \\ \text{positivo} & \text{si} & -2 < x < 1 \\ \text{positivo} & \text{si} & 1 < x \end{cases}$$

por tanto, f(x) crece en el intervalo $(-\infty,-3)$ y en el intervalo $(-2,+\infty)$ y f(x) decrece en $(-3,-2)$.

Máximos y mínimos absolutos no hay pues

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty.$$



Problema 10

Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = x^4 - 2x^2$.

Solución

1. Campo de existencia.

La función está bien definida para todo $x \in \mathbf{R}$.

2. Puntos de discontinuidad.

La función es continua en todo punto.

3. Simetrías.

La función presenta simetría respecto al eje OY pues

$$f(x) = x^4 - 2x^2$$

$$f(-x) = (-x)^4 - 2(-x)^2 = x^4 - 2x^2.$$

4. Asíntotas:

Como la función es continua en **R**, no hay asíntotas verticales.

Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$, no hay asíntotas horizontales.

Como $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$, no hay asíntotas oblícuas.

Al no tener asíntotas en el infinito, entonces la función posee la forma de rama parabólica en el infinito.

5. Puntos de corte con los ejes.

Con el eje OY: $f(0) = 0$, luego la gráfica corta a OY en (0,0).

Con el eje OX: Son las raíces de la ecuación $x^4 - 2x^2 = 0$. Tiene como soluciones $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt{2}$ y $x_3 = -\sqrt{2}$, luego la gráfica corta a OX en $(0,0)$, $(\sqrt{2}, 0)$ y $(-\sqrt{2}, 0)$.

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Al ser la función derivable tantas veces como se quiera, aplicamos los criterios sobre la derivada estudiando su signo.

$$(f')(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1).$$

La ecuación $f'(x) = 0$ tiene por soluciones $x_1 = 0, x_2 = 1$ y $x_3 = -1$.

Si $x \in (-\infty, -1)$ es $f'(x) < 0$, luego f(x) es decreciente en $(-\infty, -1)$.

Si $x \in (-1, 0)$ es $f'(x) > 0$, luego f(x) es creciente en (-1,0).

Si $x \in (0,1)$ es $f'(x) < 0$, luego f(x) es decreciente en (0,1).

Si $x \in (1, +\infty)$ es $f'(x) > 0$, luego f(x) es creciente en $(1, +\infty)$.

7. Máximos y mínimos relativos.

Como $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ y $x_3 = -1$, son soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$, estos serán los posibles máximos o mínimos. O bien observamos el crecimiento a cada lado de uno de los puntos, o bien aplicamos el criterio sobre la segunda derivada.

$$f''(x) = 12x^2 - 4,$$

$f''(-1) = 8 > 0$, luego existe un mínimo en $x = -1$.

$f''(0) = -4 < 0$, luego existe un máximo en $x = 0$.

$f''(1) = 8 > 0$, luego existe un mínimo en $x = 1$.

Como $f(0) = 0$, $f(1) = -1$ y $f(-1) = -1$ resulta que el punto (0,0) es un máximo relativo y los puntos (1,-1) y (-1,1) son mínimos relativos.

8. Intervalos de concavidad y convexidad.

La ecuación $f''(x) = 0$ tiene por soluciones $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Si $x \in (-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ es $f''(x) > 0$, luego f(x) es convexa.

Si $x \in (-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ es $f''(x) < 0$, luego f(x) es concava.

Si $x \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ es $f''(x) > 0$, luego f(x) es convexa.

9. Puntos de inflexión.

Hemos visto que $f''(x) = 0$ para $x_1 = \frac{\sqrt{3}}{3}$ y $x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$. Calculamos

$f'''(x)$ y evaluamos su valor para esos puntos .

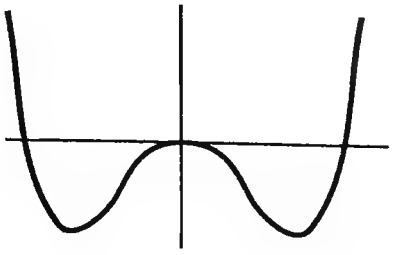
$$f'''(x) = 24x .$$

$$f'''\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 8\sqrt{3} \neq 0 \quad \text{y} \quad f'''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -8\sqrt{3} \neq 0$$

Resulta que hay dos puntos de inflexión, para los cuales la función alcanza los valores:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{5}{9} \quad \text{y} \quad f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{5}{9} .$$

Por tanto, los puntos de inflexión son $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$.



Problema 11

Representar la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + x - 2}$.

Solución

· Inicialmente determinamos el dominio de la función, para ello se estudian los puntos ùque anulan al denominador.Como $x^2+x-2 = 0$ tiene por soluciones $x = -2$ y $x = 1$, resulta que la función f está definida en

$$\mathbf{R}-\{-2,1\} = (-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty) .$$

Por otra parte, la función es cociente de dos funciones continuas y el denominador no se anula, luego es una función continua en su dominio de

definición. Los puntos -2 y 1 son puntos de discontinuidad con salto infinito, es decir,

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x^2}{x^2+x-2} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to -2^+} \frac{x^2}{x^2+x-2} = -\infty ,$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x^2+x-2} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x^2+x-2} = +\infty .$$

Así pues las rectas $x + 2 = 0$ y $x - 1 = 0$ son rectas asíntotas verticales. Además, $y - 1 = 0$ es una asíntota horizontal ya que

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2+x-2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2+x-2} = 1 .$$

El único punto de corte con los ejes es el (0,0).

A continuación estudiamos el crecimiento y decrecimiento de la función estudiando el signo de la función derivada, puesto que por ser cociente de dos funciones derivables y no anularse el denominador, es una función derivable en todo el dominio de definición

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+x-2) - x^2(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = \frac{x^2-4x}{(x^2+x-2)^2}$$

para $x \in \mathbf{R}-\{-2,1\}$.

Resulta que $f'(x) = 0$ si $x^2-4x = 0$, es decir, si $x = 0$ y $x = 4$, y como la función derivada no es una función continua estudiamos el signo de la derivada en cada uno de los intervalos siguientes

$f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -2)$, f es creciente en $(-\infty,-2)$.

$f'(x) > 0$ si $x \in (-2, 0)$, f es creciente en $(-2,0)$.

$f'(x) < 0$ si $x \in (0, 1)$, f es decreciente en $(0,1)$.

$f'(x) < 0$ si $x \in (1, 4)$, f es decreciente en $(1,4)$.

$f'(x) > 0$ si $x \in (4, +\infty)$, f es creciente en $(4,+\infty)$.

Por tanto, f es creciente en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)\cup(4,+\infty)$ y es decreciente en $(0,1)\cup(1,4)$. Por consiguiente la función tiene un máximo relativo en $(0,0)$

y un mínimo relativo en $(4, \frac{8}{9})$.

Estudiamos el signo de la derivada segunda

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x^2+x-2)^2 - 2(x^2-4x)(x^2+x-2)(2x+1)}{(x^2+x-2)^4},$$

que es una función derivable para todo $x \in \mathbf{R}-\{-2,1\}$. Se tiene que $f''(x) = 0$ si $-2x^3+12x^2+8 = 0$; esta ecuación tiene una única solución real ξ en el intervalo (6'1,6'2). En particular,

Para $x=-3$ se tiene $f''(x) > 0$, f es convexa en $(-\infty,-2)$.

Para $x=0$ se tiene $f''(0) = -\frac{3}{4} < 0$, f es cóncava en (-2,1).

Para $x=4$ se tiene $f''(4) = -\frac{4 \cdot 18^2}{6^4} > 0$, f es convexa en $(1,\xi)$.

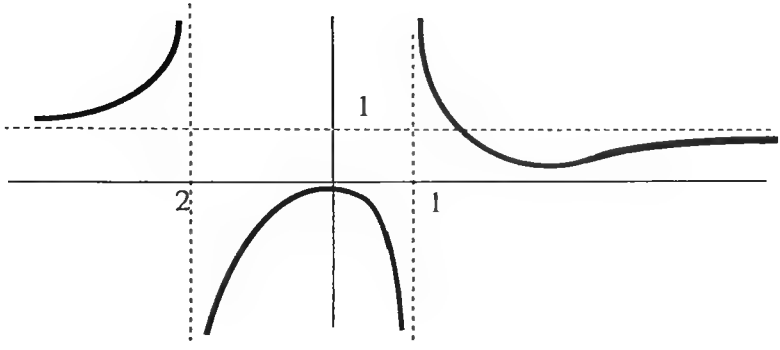
Para $x=8$ se tiene $f''(x) < 0$, f es cóncava en $(\xi,+\infty)$.

Por otra parte, la gráfica de la función corta a la asíntota $y = 1$ en el punto (2,1) y f tiene un punto de inflexión en el intervalo (6'1,6'2).

Por último, calculamos los valores de f para algunos valores de x:

x	-4	-3	-1	3	4	5
f(x)	1'6	2'25	-0'5	0'9	0'88	0'89

La gráfica de la función f, según los datos anteriores, es la siguiénte:



Problema 12

Estudiar y representar gráficamente la función

$$f(x) = (x - 1)\ (x - 1)\ (x + 2).$$

Solución

1. Campo de definición.

La función está bien definida para todo $x \in \mathbf{R}$.

2. Puntos de discontinuidad.

La función es continua en todo punto, por ser una función polinómica.

3. Simetrías.

Esta función no representa ningún tipo de simetría con respecto a los ejes ni origen pues por ejemplo

$$f(2) \neq f(-2) \qquad \text{y} \qquad f(2) \neq -f(-2).$$

4. Asíntotas.

Como $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ y $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ no hay asíntotas oblicuas.

Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ no hay asíntotas horizontales.

Por último como $\lim_{x \to a} f(x) \neq \pm\infty$, para todo $a \in \mathbf{R}$, no hay asíntotas

verticales.

5. Puntos de corte con los ejes.

Con el eje OX , la solución de $0 = (x-1)(x-1)(x+2)$ es $x_1 = 1$ y $x_2 = -2$, luego los puntos pedidos son (1,0) y (-2,0).

Con el eje OY , como $f(x) = 2$ si $x = 0$, entonces el punto de corte con OY es (0,2).

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f(x) = (x-1)(x-1)(x+2).$$

$$f'(x) = 3x^2-3.$$

Por tanto $f'(x) = 0$ tiene por soluciones $x = \pm 1$.

Si $x \in (-\infty,-1)$ es $f'(x) > 0$ luego $f(x)$ es creciente.

Si $x \in (-1,1)$ es $f'(x) < 0$ luego $f(x)$ es decreciente.

Si $x \in (1,+\infty)$ es $f'(x) > 0$ luego $f(x)$ es creciente.

7. Máximos y mínimos relativos.

Los posibles máximos o mínimos serán $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ por ser estos valores solución de la ecuación $f'(x) = 0$.

Como $f''(x) = 6x$, resulta que

$f''(1) = 6 > 0$, luego existe un mínimo

y

$f''(-1) = -6 < 0$, luego existe un máximo.

El mínimo relativo será (1,0) pues $f(1) = 0$.

El máximo relativo será (-1,4) pues $f(-1) = 4$.

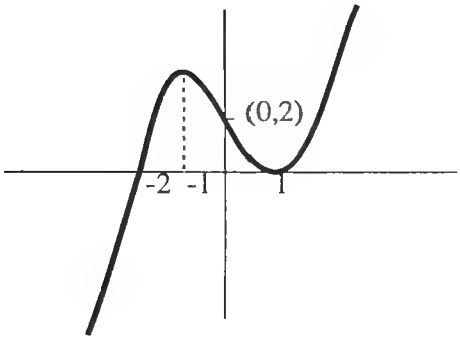
8. Intervalos de concavidad y convexidad.

La solución de la ecuación $f''(x) = 0$ es $x = 0$, entonces

- Si $x \in (-\infty,0)$ es $f''(x) < 0$ luego $f(x)$ es cóncava.
- Si $x \in (0,+\infty)$ es $f''(x) > 0$ luego $f(x)$ es convexa.

9. Puntos de inflexión.

Hemos visto que $f''(x) = 0$ si $x = 0$, como $f'''(x) = 6 \neq 0$ para todo x, resulta que en $x = 0$ tenemos un punto de inflexión. Como $f(0) = 2$ resulta que (0,2) es el punto de inflexión.



Problema 13

Representar gráficamente la función $y = x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Solución

1. Campo de definición.

Los valores que verifican $\dfrac{1+x}{1-x} \geq 0$ son los $x \in [-1,1)$, luego la función está definida en $[-1,1)$.

2. Puntos de discontinuidad.

La función será continua en todo punto que no anule el denominador de la raíz, es decir para $x = 1$, pero este punto no pertenece al campo de existencia de la función. Luego la función es continua en $[-1,1)$.

3. Simetrías.

No presenta ningún tipo de simetrías.

4. Asíntotas.

Como $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} = \infty$, resulta que $x = 1$ es asíntota vertical.

5. Puntos de corte con los ejes.

La ecuación $0 = x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ tiene por solución los puntos $x_1 = 0$ y $x_2 = -1$, luego los puntos de corte son (-1,0) y (0,0).

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f'(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \frac{x}{(1-x)^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}.$$

La ecuación $f'(x) = 0$ tiene por soluciones $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Estudiaremos el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos:

Si $x \in (-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$ es $f'(x) < 0$, luego f(x) es decreciente.

Si $x \in (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1)$ es $f'(x) > 0$, luego f(x) es creciente.

7. Máximos y mínimos relativos.

Como $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, es solución de la ecuación $f'(x) = 0$ y

$$f''(x) = \frac{2}{(1-x)^2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} - x\,\frac{-2(1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}{(1-x)^3(1+x)}$$

resulta que $f''(\frac{1-\sqrt{5}}{2}) > 0$ y, por consiguiente, la función f(x) tiene un mínimo relativo en el punto de abscisa $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

8. Tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto (0,0).

Sabemos que la tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto (0,0) es la recta $y - 0 = f'(0)(x - 0)$, es decir, $y = f'(0)\,x$. Como $f'(0) = 1$ (según resulta de hacer $x = 0$ en la expresión de f' hallada en el punto 6) la tangente

buscada es la recta $y = x$.

9. Tangente a la gráfica de la función f(x) en el punto (-1,0).

Procediendo como en el problema **11** del tema 4, se tiene que

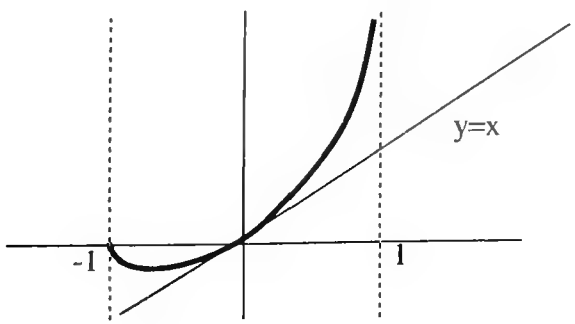
$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-1+h)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{(-1+h)}{h} \sqrt{\frac{h}{2-h}} = \lim_{h \to 0^+} \frac{(-1+h)\sqrt{\frac{h}{2-h}}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \left(\sqrt{\frac{h}{2-h}} + (-1+h)\frac{1}{2} \frac{(2-h)+h}{(2-h)^2 \sqrt{\frac{h}{2-h}}} \right) =$$

$$= 0 + \lim_{h \to 0^+} (-1+h) \frac{1}{(2-h)^2 \sqrt{\frac{h}{2-h}}} = -\infty$$

y, por tanto, la tangente buscada es la recta $x = -1$.



Problema 14

Representar gráficamente la función $y = \text{sen}^2 x$.

Solución

1. Como la función sen x está definida y es continua en todo **R** entonces la función $f(x) = \text{sen}^2 x = (\text{sen } x)^2$ está también definida y es continua en $(-\infty,+\infty)$.

Además como $\text{sen}(x+\pi) = -\text{sen } x$ para todo $x \in (-\infty,+\infty)$ resulta que

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= (\text{sen}(x+\pi))^2 = \\ &= (-\text{sen } x)^2 = \\ &= (-1)^2 (\text{sen } x)^2 = \\ &= \text{sen}^2 x = \\ &= f(x) \end{aligned}$$

y, por tanto, la función es periódica de período π, bastando por consiguiente, representarla en un solo periódo, por lo que estudiaremos la función en $[0,\pi]$.

2. Puntos de corte con los ejes.

Si $x = 0$ entonces $f(0) = \text{sen}^2 0 = 0$ y además $0 = f(x) = \text{sen}^2 x$ se verifica si y sólo si $\text{sen } x = 0$ luego como estamos restringiéndonos a $[0,\pi]$, resulta que $x = 0$ y $x = \pi$. Luego los puntos de corte con los ejes son los puntos $(0,0)$ y $(\pi,0)$.

3. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Como $f'(x) = 2 \text{ sen } x \cos x$, $\text{sen } x > 0$ para todo $x \in (0,\pi)$, $\cos x > 0$ si $x \in (0,\pi/2)$ y $\cos x < 0$ si $x \in (\pi/2,\pi)$ resulta que si $x \in (0,\pi/2)$ entonces $f'(x) > 0$ y si $x \in (\pi/2,\pi)$ entonces $f'(x) < 0$. Luego $f(x)$ es creciente en $(0,\pi/2)$ y decreciente en $(\pi/2,\pi)$.

3. Máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión.

La ecuación $f'(x) = 2 \text{ sen } x \cos x = 0$ tiene solución en los $x \in [0,\pi]$ que anulan al seno o al coseno, es decir cuando $x = 0$, $x = \pi/2$ o $x = \pi$ (no olvidemos que estamos estudiando la curva en $[0,\pi]$).

Como $f''(x) = 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)$ y $f''(0) = f''(\pi) = 2 > 0$ y $f''(\pi/2) = -2 < 0$ resulta que f tiene un máximo relativo en el punto $(\pi/2,1)$ y mínimos relativos en los puntos $(0,0)$ y $(\pi,0)$.

Por otra parte, $f''(x) = 2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) = 0$ cuando $\cos^2 x = \text{sen}^2 x$ es

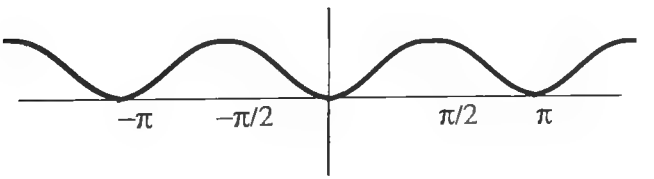
decir cuando $x = \pi/4$ o $x = 3\pi/4$.

Como $f'''(x) = 2(-2\cos x \operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x) = -8 \operatorname{sen} x \cos x$, resulta que

$f'''(\pi/4) = -8 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = -4 \neq 0$ y $f'''(3\pi/4) = (-8) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 \neq 0$

y, por tanto, $(\pi/4, 1/2)$ y $(3\pi/4, 1/2)$ son puntos de inflexión.

Por lo tanto la gráfica será:



Problema 15

Estudiar y representar gráficamente la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$.

Solución

1. Campo de existencia.

La expresión de la función no tiene sentido en los puntos donde se anula el denominador, es decir en $x = 1$ y $x = 3$. Por tanto, el campo de existencia es $(-\infty,1) \cup (1,3) \cup (3,+\infty)$.

2. Puntos de discontinuidad.

La función es continua en todo punto que no anule el denominador, por ser cociente de funciones continuas. Luego, la función es discontinua en $x = 1$ y $x = 3$ pues, aunque la función no está definida en esos puntos, está definida en un entorno reducido de ellos. Además, la discontinuidad es de salto infinito, por lo tanto, existen rectas asíntotas verticales.

3. Simetrías.

La función no presenta ningún tipo de simetría pues por ejemplo

$$f(2) \neq f(-2) \quad \text{y} \quad f(2) \neq -f(-2).$$

4. Asíntotas.

Como $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \infty$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$,

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to 3^+} f(x) = \infty$,

entonces las rectas $x = 1$ y $x = 3$ son asíntotas verticales.

Como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$, entonces la recta $y = 1$ es asíntota en el $+\infty$ y en el $-\infty$.

5. Puntos de corte con los ejes.

Con el eje OX: La ecuación $0 = \dfrac{x^2}{x^2 - 4x + 3}$ tiene por solución el punto $x = 0$, luego el único punto de corte de la gráfica de la función al eje OX es (0,0).

6. Intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Dado que la función es cociente de dos funciones derivables y el denominador no se anula en su dominio, la función f es derivable, pero su función derivada no es continua.

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 4x + 3) - x^2(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 3)^2} = \frac{-4x^2 + 6x}{(x^2 - 4x + 3)^2}.$$

Se calculan los puntos que anulan a la derivada. La ecuación $f'(x) = 0$ tiene las soluciones $x_1 = 0$ y $x_2 = \dfrac{3}{2}$. Como hemos visto que la función es discontinua en $x = 1$ y $x = 3$, estudiaremos el signo de $f'(x)$ en los siguientes intervalos:

Si $x \in (-\infty, 0)$ es $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ es decreciente.

Si $x \in (0,1)$ es $f'(x) > 0$, luego $f(x)$ es creciente.

Si $x \in (1, \frac{3}{2})$ es $f'(x) > 0$, luego $f(x)$ es creciente.

Si $x \in (\frac{3}{2}, 3)$ es $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ es decreciente.

Si $x \in (3, +\infty)$ es $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ es decreciente.

7. Máximos y mínimos relativos.

Como $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{3}{2}$, son soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$, entonces son los puntos donde posiblemente se alcancen valores máximos y mínimos relativos. Calculamos $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{(-8x+6)\,(x^2-4x+3)^2 - 2\,(x^2-4x+3)\,(2x-4)\,(-4x^2+6x)}{(x^2-4x+3)^4}$$

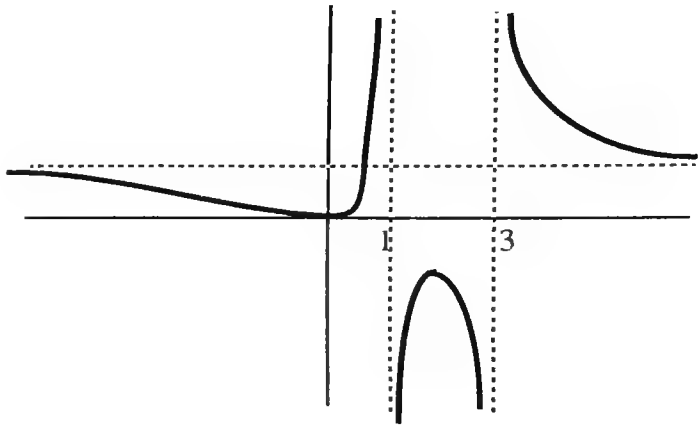
$$= \frac{(-8x+6)\,(x^2-4x+3) - (4x-8)\,(-4x^2+6x)}{(x^2-4x+3)^3},$$

y analizamos el valor de $f''(x)$ para $x_1 = 0$ y $x_2 = \frac{3}{2}$:

$f''(0) > 0$, luego existe un mínimo relativo en $x = 0$.

$f''(\frac{3}{2}) < 0$, luego existe un máximo relativo en $x = \frac{3}{2}$.

Como $f(0) = 0$ y $f(\frac{3}{2}) = -3$, resulta que el punto $(0,0)$ es el mínimo relativo y $(\frac{3}{2}, -3)$ es el máximo relativo.



Problema 16

Estudiar la función $f(x) = x\,\mathrm{Ln}\,|x|$ y representar su gráfica.

Solución

La función f(x) está definida en $\mathbf{R}-\{0\}$ ya que $\mathrm{Ln}\,|x|$ está definido únicamente en dicho conjunto y es una función continua por ser producto de funciones continuas en su dominio de definición. Veamos que ocurre en $x = 0$.

$$f(0^+) = \lim_{x \to 0^+} x\mathrm{Ln}|x| = \lim_{x \to 0^+} \frac{\mathrm{Ln}x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0.$$

$$f(0^-) = \lim_{x \to 0^-} x\mathrm{Ln}|x| = \lim_{x \to 0^-} x\mathrm{Ln}(-x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\mathrm{Ln}(-x)}{\frac{1}{x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{\frac{-1}{-x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^-} (-x) = 0.$$

Por tanto, si consideramos $f(0)=0$, la función

$$f(x) = \begin{cases} x\,Ln|x| & si \quad x \neq 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$$

está definida en todo **R** y es continua.

La función f(x) es derivable en **R**-{0} por ser producto de funciones derivables en su dominio de definición. Veamos que ocurre en $x=0$.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{h\,Ln|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h\,Lnh}{h} = \lim_{h \to 0^+} Lnh = -\infty.$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{h\,Ln|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h\,Ln(-h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} Ln(-h) = -\infty.$$

Luego, no existe derivada para la función ampliada a todo **R** (en sentido generalizado) y es

$$f'(x) = 1 + Ln|x| \quad si \quad x \neq 0 \quad .$$

Las raíces de la ecuación $x\,Ln|x| = 0$ son $x_1 = 0, x_2 = 1$ y $x_3 = -1$, luego la curva pasa por (0,0), (1,0) y (-1,0).

Para hallar los máximos y mínimos relativos en **R**-{0} resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$,

si $x > 0$, $1 + Ln\,x = 0$ tiene por raíz $x = e^{-1}$,

si $x < 0$, $1 + Ln(-x) = 0$ tiene por raíz $x = -e^{-1}$.

Como $f''(x) = \frac{1}{x}$, tenemos que

$f''(e^{-1}) > 0$ luego f tiene un mínimo en $x = e^{-1}$,

$f''(-e^{-1}) < 0$ luego f tiene un máximo en $x = -e^{-1}$.

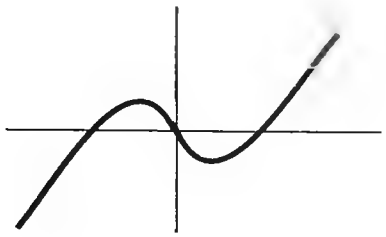
En $(-\infty,-e^{-1}) \cup (e^{-1},+\infty)$ ocurre que $f'(x) > 0$, luego la función es creciente y en $(-e^{-1},e^{-1})$ es $f'(x) < 0$ luego la función es decreciente. Por otra parte,

$$\lim_{x \to \infty} xLn|x| = \lim_{x \to \infty} xLnx = \infty$$

y

$$\lim_{x \to -\infty} xLn|x| = \lim_{x \to -\infty} xLn(-x) = -\infty .$$

Con estos datos representamos la gráfica de la función.



Problema 17

Estudiar la gráfica de la función $f(x) = e^{-x}Lnx$.

Solución

La función f(x) sólo está definida en (0,+∞) puesto que la función logaritmo sólo está definida en dicho conjunto. Además, en todo el intervalo de definición f(x) es continua y derivable por ser producto de dos funciones continuas y derivables.

La gráfica corta al eje de las abscisas en las raíces de la ecuación $f(x) = 0$, es decir, en $x = 1$ dado que es la única solución de la ecuación $e^{-x}Lnx = 0$.

Buscamos los puntos de máximo o mínimo relativos entre los puntos que anulan a la primera derivada, es decir, han de cumplir la ecuación:

$$e^{-x} \cdot \frac{1}{x} + Lnx \cdot e^{-x}(-1) = 0$$

o lo que es lo mismo

$$e^{-x}\left(\frac{1}{x} - Lnx\right) = 0 .$$

Como la función exponencial no se anula nunca entonces la anterior ecuación es equivalente a la ecuación

$$\frac{1}{x} - \mathrm{Ln}x = 0,$$

ecuación que es equivalente a $x - e^{1/x} = 0$.

Un estudio de las gráficas de las funciones de los dos miembros de la anterior ecuación permite determinar que existe una única solución de la ecuación. Determinamos una aproximación de ella:

$$\text{Si } x=1 \text{ entonces } 1\text{-}e<0 \text{ y si } x=2 \text{ entonces } 2-e^{1/2}>0,$$

por tanto hay una raiz entre 1 y 2. Denotemos por α a dicha raíz pues su cálculo debe hacerse por métodos numéricos. $(\alpha \approx 1.76322)$.

En el intervalo $(0,\alpha)$ se tiene que $f'(x) > 0$ y en $(\alpha,+\infty)$ se tiene que $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ es creciente en $(0,\alpha)$ y decreciente en $(\alpha,+\infty)$.

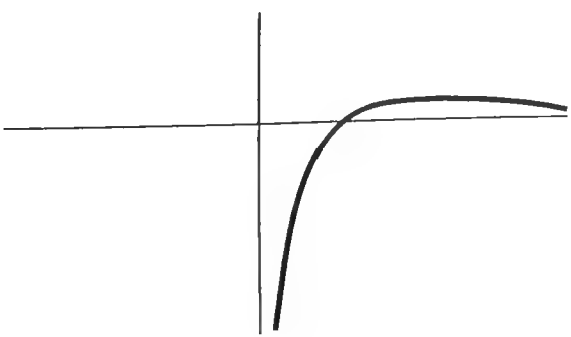
Por otra parte

$$\lim_{x \to 0} e^{-x}\mathrm{Ln}x = -\infty$$

y

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x}\mathrm{Ln}x = \lim_{x \to \infty} \frac{\mathrm{Ln}x}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x \cdot e^x} = 0 .$$

Por tanto la gráfica de la función es:



Tema 6

La Integral de Riemann

Problema 1

Dada una función integrable $f:[a,b]\to\mathbf{R}$ tal que $f(x)\geq 0$ para todo $x\in[a,b]$, probar que

$$\int_a^b f\geq 0.$$

Solución

Si f es integrable en [a,b], entonces

$$\int_a^b f=\sup\{s(f,p):p\in P([a,b])\}$$

donde s(f,p) es la suma inferior de la función f respecto de la partición

$$p=\{a=t_0\leq t_1\leq.....\leq t_{n-1}\leq t_n=b\}.$$

Como cada $s(f,p)=\sum_{i=1}^{n} m_i\,(t_i-t_{i-1})\geq 0,$

pues $m_i=\inf\{f(t):t\in[t_i,t_{i+1}]\}\geq 0$, entonces $\int_a^b f\geq 0.$

Problema 2

Dada una función constante f:[a,b]→**R** con valor f(x) = k para todo x ∈ [a,b]. Demostrar que

$$\int_a^b f = k\,(b-a)\,.$$

Solución

La función f es continua por ser constante, así pues, es una función integrable y además,

$$\int_a^b f = \sup\{s(f,p) : p \in P([a,b])\}.$$

Sea p una partición cualquiera de [a,b]

$$p = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\},$$

tenemos que $m_i = \inf\{ f(t) : t_{i-1} \le t \le t_i \} = k$ para todo i = 1,2,...,n. Luego,

$$s(f,p) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,(t_i - t_{i-1}) = k \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = k\,(b-a)\,,$$

y por tanto,

$$s(f,p) = (b-a)\,k \quad \text{para todo } p \in P([a,b])$$

luego $\int_a^b f = (b-a)\,k.$

Problema 3

Sea f:[a,b]→**R** una función tal que $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq c \\ r & \text{si} \quad x = c \end{cases}$

con $c \in [a,b]$ y $r \neq 0$. Probar que f es integrable y que $\int_a^b f = 0$.

Solución

Inicialmente se supone que $r > 0$. Sea p una partición cualquiera tal que

$$\text{máx}\{t_i - t_{i-1}\} \leq \frac{\varepsilon}{2r}.$$

Fijada una partición de este tipo, el punto c puede coincidir con algún t_i en cuyo caso pertenece a los dos intervalos $[t_{i-1},t_i]$ y $[t_i,t_{i+1}]$ ó ser interior a algún $[t_{i-1},t_i]$. El primer caso es más general, así pues, lo consideramos de esa forma y calculamos S(f,p) y s(f,p):

$s(f,p) = 0$ para todo p, puesto que $m_i = \text{ínf}\{f(t): t_{i-1} \leq t \leq t_i\} = 0$.

$$S(f,p) = r \cdot (t_{i+1} - t_i) + r \cdot (t_i - t_{i-1}) = r \cdot [(t_{i+1} - t_{i-1})] \leq r \cdot \frac{2\varepsilon}{2r} = \varepsilon.$$

Al ser $S(f,p) - s(f,p) \leq \varepsilon$ se tiene que f es una función integrable. Además

$$\int_a^b f = \sup\{s(f,p) : p \in P([a,b])\} = 0.$$

Si $r < 0$, basta observar que $g = -f$ está en el supuesto anterior; g es integrable y, por tanto, $\int_a^b g = 0$. Entonces $f = -g$ de donde $\int_a^b f = -\int_a^b g = 0$.

Problema 4

Dada una función integrable $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ y $g:[a,b] \to \mathbf{R}$ otra función tal que $f(x) = g(x)$ salvo en $c \in [a,b]$. Probar que g es integrable y que $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Solución

Consideramos la función $h(x) = f(x) - g(x)$, entonces h(x) es de la forma

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \neq c \\ f(c) - g(c) & \text{si} \quad x = c \end{cases}$$

Como se observa en el Problema 3, la función h(x) es integrable en [a,b] y $\int_a^b h = 0$, por tanto, como la función g puede expresarse como diferencia de dos funciones integrables,

$$g(x) = f(x) - h(x),$$

entonces es una función integrable. Además,

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - h(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Observación: Es importante observar que este proceso se puede generalizar para un número finito de puntos: Dadas dos funciones f y g, si f es integrable en el intervalo [a,b] y $\{x:f(x) \neq g(x)\}$ es un conjunto finito, entonces g es integrable y

$$\int_a^b f = \int_a^b g\,.$$

Problema 5

Calcular $\int_0^2 [x^2]\,dx$.

([b] denota la parte entera del número b; es decir, el mayor entero menor o igual que b)

Solución

Inicialmente se estudia la expresión explícita de la función $f(x) = [x^2]$ en el intervalo [0,2], que es la siguiente:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad 0 \le x < 1 \\ 1 & \text{si} \quad 1 \le x < \sqrt{2} \\ 2 & \text{si} \quad \sqrt{2} \le x < \sqrt{3} \\ 3 & \text{si} \quad \sqrt{3} \le x < 2 \\ 4 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$$

Este es el caso de una función que toma valores constantes sobre intervalos. En el punto x = 2 se puede considerar el valor de f, según los resultados anteriores, como f(2) = 3. Entonces

$$\int_0^2 [x^2]\,dx = \int_0^2 f = \int_0^1 f + \int_1^{\sqrt{2}} f + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} f + \int_{\sqrt{3}}^2 f =$$

$$= 0\,(1-0) + 1\,(\sqrt{2}-1) + 2\,(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + 3\,(2-\sqrt{3}) =$$

$$= \sqrt{2} - 1 + 2\sqrt{3} - 2\sqrt{2} + 6 - 3\sqrt{3} = 5 - \sqrt{2} - \sqrt{3} \cong 1.85373563.$$

Problema 6

Calcular $\int_0^3 x\,dx$ utilizando la definición de integral.

Solución

La función f(x) = x es una función continua, luego es integrable. Se considera la partición homogénea

$$\{\, t_0 = 0 < t_1 = \frac{1}{n} < t_2 = \frac{2}{n} < \ldots < t_{3n} = \frac{3n}{n} = 3 \,\},$$

y se calculan las sumas de Riemann

$$S(f,p) = \sum_{k=1}^{3n} \sup\{x : x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\} \cdot \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{3n} \frac{k}{n^2} = \frac{3\,(3n+1)}{2n},$$

por ser la suma de una progresión aritmética de razón $\frac{1}{n^2}$.

Al tender n a infinito resulta

$$\int_0^3 x\,dx = \frac{9}{2}.$$

Problema 7

Calcúlese mediante la definición la integral $\int_0^b e^t dt$.

Solución

La función e^t es una función integrable por ser continua. Tomamos una partición homogénea, $p_n = \{0 < \frac{b}{n} < \frac{2b}{n} < ... < \frac{nb}{n} = b\}$ y calculamos las sumas de Riemann.

Como la función es creciente se tiene que

$$s(e^t,p) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{kb}{n}} \frac{b}{n} = 0 + 1 \cdot \frac{b}{n} + e^{b/n} \cdot \frac{b}{n} + ... + e^{\frac{n-1}{n}b} \cdot \frac{b}{n} =$$

$$= \frac{b}{n}\left(0 + 1 + e^{b/n} + ... + e^{\frac{n-1}{n}b}\right) = \frac{b\,(e^b - 1)}{n\,(e^{b/n} - 1)}.$$

Al hacer tender n a infinito obtenemos el valor de la integral. Se considera la función $\varphi(x) = \frac{xb\,(e^b - 1)}{e^{bx} - 1}$, porque en los valores de $x = \frac{1}{n}$ obtenemos las sumas inferiores de las particiones p_n, se halla el límite;

$$I = \lim_{x \to 0} \varphi(x) = \lim_{x \to 0} \frac{xb\,(e^b - 1)}{e^{bx} - 1},$$

al aplicar l'Hôpital para reducir la indeterminación, se tiene que

$$I = \lim_{x \to 0} \frac{b(e^b - 1)}{be^{bx}} = e^b - 1.$$

Entonces

$$\lim_{n \to \infty} s(e^t, p_n) = \lim_{n \to \infty} \varphi(\frac{1}{n}) = \lim_{x \to 0} \varphi(x)$$

y por ser $t(t) = e^t$ integrable se tiene que

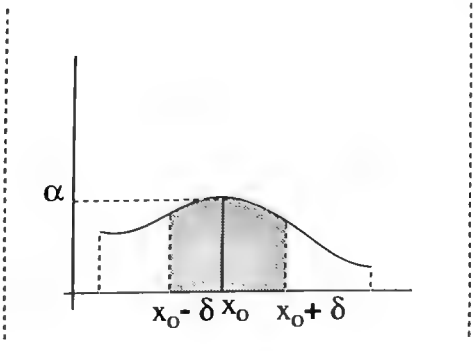
$$\lim_{n \to \infty} s(e^t, p_n) = \int_0^b e^t dt = \int_0^b e^t dt = e^b - 1.$$

Problema 8

Sea $f:[a,b] \to \mathbf{R}$ una función continua. Probar que si $\int_a^b |f(x)|dx = 0$, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Solución

Para comprobar este resultado procedemos por reducción al absurdo. Se supone que $f(x)$ es una función no nula y se deduce que $\int_a^b |f(x)|dx \neq 0$.



Supongamos pues que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $|f(x_0)| = \alpha \neq 0$, entonces por ser f continua existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ entonces $|f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}$.

Dado que $|f(x)|$ es no negativa, se tiene

$$\int_a^b |f(x)|dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)|dx \geq \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\alpha}{2}dx = \frac{\alpha}{2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} dx =$$

$$= \frac{\alpha \cdot 2\delta}{2} = \alpha \cdot \delta > 0.$$

Tema 7

Teoremas Fundamentales del Cálculo Integral

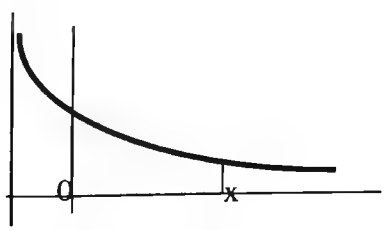
Problema 1

Calcular las funciones derivadas de las siguientes funciones:

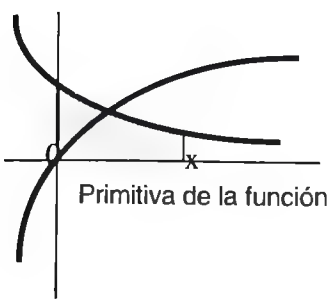
a) $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt.$

b) $g(x)=\int_{-1}^{x^2+1} t^2 dt.$

Solución :



Gráfica de la función $f(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t}dt$



Primitiva de la función

a) La función $t(x) = \dfrac{1}{1+x}$ es una función continua en $\mathbf{R}^+$, así pues, se puede aplicar el teorema fundamental del Cálculo. Luego,

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}.$$

b) La función $t_1(x) = x^2$ es una función continua en todo **R** y la función $t_2(x) = x^2+1$ es una función derivable en todo **R**. Por la regla de Barrow se tiene:

$$\int_{-1}^{x^2+1} t^2 dt = G(x^2+1) - G(-1),$$

supuesto que G es una función primitiva de t_1. Por el teorema fundamental del Cálculo Integral la función G o la función $h_1(x) = \int_0^x t^2 dt$ son derivables y su derivada es

$$G'(x) = h_1'(x) = x^2 .$$

Para derivar la función g se debe aplicar la regla de la cadena, puesto que esta función es una composición de las funciones h_1 y t_2, $g(x) = h_1 \circ t_2(x)$. Por la regla de la cadena

$$g'(x) = h'_1(t_2(x)) \cdot t'_2(x) = (x^2+1)^2 \cdot 2x.$$

Problema 2

Sea f una función continua en **R**. Calcular F'(x) si se define

$$F(x) = \int_0^x xf(t)\,dt .$$

Solución:

Se integra respecto a t, así pues, la x puede salir de la integral, pudiendo expresarse la función F como un producto de funciones en la

variable x:

$$F(x) = x\int_0^x f(t)\,dt.$$

La derivada de F(x) es la derivada de un producto

$$F'(x) = 1 \cdot \int_0^x f(t)\,dt + x \cdot f(x)$$

donde para calcular la derivada del segundo multiplicando se aplica el primer teorema fundamental del Cálculo, puesto que la función f es continua.

Problema 3

Calcular

$$\text{a) } \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (t^3+t^2)\,dt}{x^4} \quad , \quad \text{b) } \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{x^2} t^2 dt}{x^4}.$$

Solución:

a) Se observa que las dos funciones son positivas en $\mathbf{R}^+$ y no acotadas, así pues, al aplicar las propiedades algebraicas de los límites se produce la indeterminación $\frac{0}{0}$. El límite se encuentra, por tanto, en condiciones de aplicar la regla de l´Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x (t^3+t^2)\,dt}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^2}{4x^3} = \frac{1}{4}.$$

b) Se puede razonar de forma análoga al razonamiento del anterior caso. Al aplicar la regla de l´Hôpital se tiene:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{\int_0^{x^2} t^2dt}{x^4} = \lim_{x\to 0+}\frac{\left(\int_0^{x^2} t^2dt\right)'}{(x^4)'} = \lim_{x\to 0+}\frac{x^4 2x}{4x^3} = \lim_{x\to 0+}\frac{x^5}{2x^3} = 0.$$

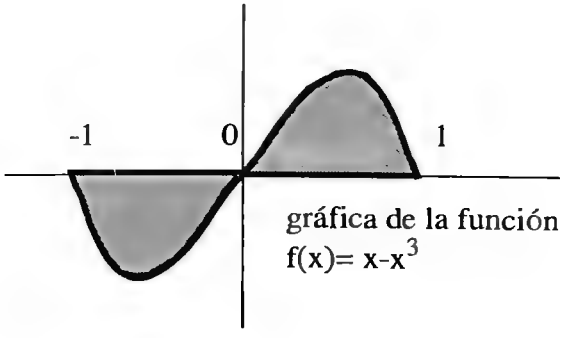
Problema 4

Calcular el área del conjunto comprendido entre las gráficas de las funciones $y = x - x^3$, $y = 0$.

Solución:

Inicialmente calculamos los puntos de corte de las dos gráficas

$x - x^3 = 0$, que tiene por raíces $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = 1$.



$$\text{Area} = \int_{-1}^{1} |x - x^3|\,dx \quad ,$$

como $y \le 0$ si $-1 \le x \le 0$ y si $0 \le x \le 1$ es $y \ge 0$, por tanto,

$$\text{Area} = -\int_{-1}^{0} (x - x^3)\,dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx \quad .$$

Si se observa la figura, se tienen dos áreas diferenciadas, una "negativa"

formada por el conjunto

$$A_1 = \{(x,y) : -1 \le x \le 0,\ f(x) \le y \le 0\}$$

y otra "positiva" formada por el conjunto

$$A_2 = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le f(x)\}.$$

$$\text{Area}(A_1 \cup A_2) = \text{Area}(A_1) + \text{Area}(A_2),$$

$$\text{Area}(A_1) = -\int_{-1}^{0} (x - x^3)\,dx \quad , \quad \text{Area}(A_2) = \int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx.$$

Por la simetría de la función respecto al origen,

$$\text{Area}(A_1 \cup A_2) = 2\,\text{Area}(A_1) = 2\int_{0}^{1} (x - x^3)\,dx = 2\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

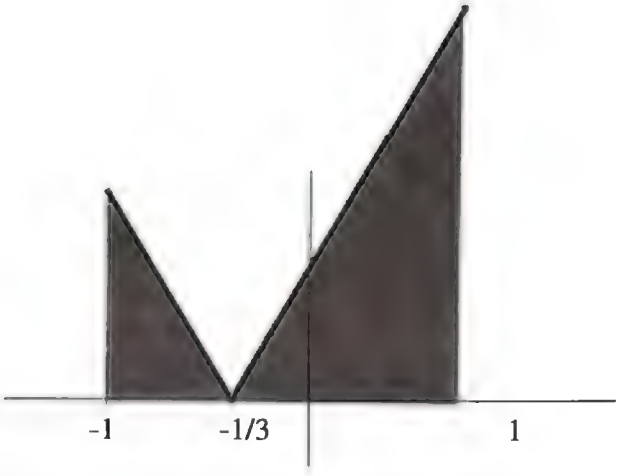
Problema 5

Calcular $\quad I = \int_{-1}^{1} |3x + 1|\,dx.$

Solución:

Por la definición de valor absoluto la expresión de la función es

$$|3x + 1| = \begin{cases} -3x - 1 & \text{si} \quad -1 \le x < \dfrac{-1}{3} \\ 3x + 1 & \text{si} \quad \dfrac{-1}{3} \le x \le 1 \end{cases}.$$



Por tanto, reescribimos la integral descomponiéndola en dos:

$$I = \int_{-1}^{-1/3}(-3x-1)dx + \int_{-1/3}^{1}(3x+1)dx =$$

$$= \left(-\frac{3}{2}\right)x^2 - x\Big|_{-1}^{-1/3} + \frac{3}{2}x^2 + x\Big|_{-1/3}^{1} = \frac{10}{3}.$$

Problema 6

Calcular un valor aproximado del área de la región limitada por la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{Lnx}$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

Solución:

Al aplicar el Teorema del Valor Medio a la función $F(x) = \int_1^x \frac{1}{Lnt}dt$ en el intervalo [2,4], se obtiene que el área solicitada viene dada por la integral definida

$$\int_2^4 \frac{1}{Lnx}dx \approx \frac{1}{Ln3}(4-2) = \frac{2}{Ln3}.$$

Problema 7

Demostrar que para $\alpha \in (0,\pi/2)$ se verifica:

$$\operatorname{sen}\alpha < \int_0^{\alpha} \sqrt{1+\operatorname{sen}x}\, dx < \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}}.$$

Solución:

Como

$$\sqrt{1+\operatorname{sen}x}\cdot\sqrt{1-\operatorname{sen}x} = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \cos x$$

se puede aplicar a la integral el segundo teorema del valor medio para integrales o y existe un $c\in(0,\alpha)$ que cumple:

$$\int_0^{\alpha}\sqrt{1+\operatorname{sen}x}dx = \int_0^{\alpha}\frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen}x}}dx = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}c}}\int_0^{\alpha}\cos x dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}c}}(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}0) = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\sqrt{1-\operatorname{sen}c}}.$$

Al ser $0 < c < \alpha$ se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}0}} < \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}c}} < \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{sen}\alpha}}$$

lo que nos lleva a la desigualdad del enunciado.

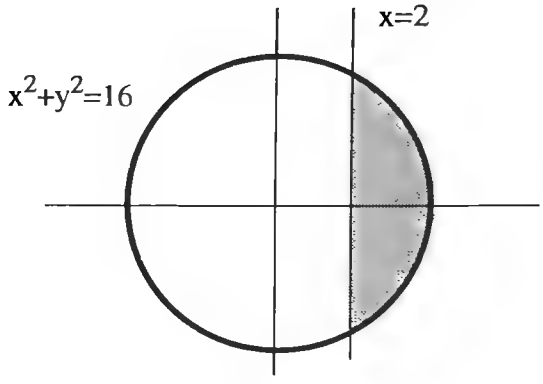
Problema 8

Hallar el área de la región limitada por el círculo $x^2+y^2 = 16$ que se encuentra en el semiplano $x > 2$.

Solución:

Como se aprecia en la figura, el área pedida es simétrica respecto al eje OY, por tanto es el doble de la que se encuentra en el primer cuadrante.

$$A = 2\int_2^4 y\,dx = 2\int_2^4 \sqrt{16 - x^2}\,dx.$$



Al hacer el cambio de variable

$$x = 4\,\text{sen}\,t \quad , \quad dx = 4\cos t\,dt$$

se tiene

$$A = 2\int_{\pi/6}^{\pi/2} (\sqrt{16 - 16\text{sen}^2 t})\,4\cos t\,dt = 32\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt =$$

$$= 32\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 16\,(t + \frac{\text{sen}2t}{2})\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = (\frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}).$$

Problema 9

La velocidad v del flujo de sangre a una distancia d del centro de una vena de radio R puede ser aproximada por la ecuación

$$v = K\,(R^2 - d^2)$$

con K constante. Calcular la velocidad promedio del flujo de sangre en función del radio de la vena.

Solución:

$$\frac{1}{R-0}\int_0^R K(R^2-r^2)\,dr = \frac{1}{R}K\left(R^2 r - \frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^R =$$

$$= \frac{K}{R}\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{2KR^2}{3}.$$

Problema 10

Sean $a,b \in \mathbf{R}$ con $a \neq 0$ y $b > a$. Demostrar que la sucesión $\{x_n\}$ definida por

$$x_n = \int_a^b (1+x^2)^n\,dx$$

para todo $n \in \mathbf{N}$, es divergente.

Solución

Por el primer teorema del valor medio para integrales, para cada $n \in \mathbf{N}$ existe $c_n \in [a,b]$ tal que

$$x_n = \int_a^b (1+x^2)^n\,dx = (1+c_n^2)^n (b-a)$$

luego

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} (1+c_n^2)^n (b-a) \geq$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} (1+a^2)^n (b-a) = +\infty$$

y la sucesión es divergente.

Tema 8

Cálculo de Primitivas

Problema 1

Integrar de dos formas diferentes:

$$I = \int (x^3-2)^2 x^2 \, dx.$$

Solución:

Aplicando el cambio de variables $u = x^3 - 2$, $du = 3x^2 \, dx$ a la integral

$$I = \int (x^3 - 2)^2 x^2 \, dx,$$

ésta se trasforma en

$$I = \frac{1}{3} \int u^2 du = \frac{1}{3}\frac{u^3}{3} = \frac{(x^3-2)^3}{9} + K.$$

De otra forma. Previa a la integración desarrollamos el cuadrado y multiplicamos por x^2;

$$I = \int (x^6 + 4 - 4x^3) x^2 \, dx = \int (x^8 + 4x^2 - 4x^5) \, dx =$$

$$= x^9/9 + 4x^3/3 - 4x^6/6 + K = \frac{x^9 + 12x^3 - 6x^6}{9} + K.$$

Problema 2

Calcular

$$I=\int\frac{(Lnx)^3}{x}dx.$$

Solución:

Aplicamos un cambio de variables. Sea u = Ln x, du = 1/x dx, la integral se trasforma en

$$I = \int\frac{(Lnx)^3}{x}dx = \int u^3 du =$$

$$=\frac{u^4}{4}+K = \frac{(Lnx)^4}{4}+K.$$

Problema 3

Evaluar la integral definida:

$$I = \int_1^e \frac{x^2-1}{x}dx\,.$$

Solución:

Calculando una primitiva inmediata y por la fórmula de Barrow se tiene

$$\int_1^e \frac{x^2-1}{x}dx = \frac{x^2}{2}-Lnx\Big|_1^e = \frac{e^2}{2}-1-\frac{1}{2} = \frac{e^2-3}{2}\,.$$

Problema 4

Calcular:

$$I = \int \frac{3+x}{(x-1)^2} dx.$$

Solución:

La raíz del denominador es x = 1, doble. Por tanto descomponemos el integrando en dos fracciones simples:

$$\frac{3+x}{(x-1)^2} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} = \frac{a(x-1)+b}{(x-1)^2}$$

de donde

$$3+x = a(x-1)+b = ax - a + b,$$

igualando coeficientes y resolviendo resulta:

$$a = 1, b = 4.$$

Por tanto

$$I = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{4}{(x-1)^2} dx = Ln|x-1| + 4\frac{(x-1)^{-1}}{-1} + K =$$

$$= Ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + K.$$

Problema 5

Hallar una primitiva de la función:

$$f(x) = \frac{x^2+x+2}{(x^2+2)^2}.$$

Solución:

El método de resolución es por descomposición en fracciones simples:

$$f(x) = \frac{x^2+2}{(x^2+2)^2} + \frac{x}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{x^2+2} + \frac{x}{(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1} + \frac{1}{2}\frac{2x}{(x^2+2)^2}.$$

Por tanto una primitiva de f(x) es la función:

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2(x^2+2)}.$$

Problema 6

Hallar

$$I = \int (x+1)\,e^x\,dx.$$

Solución:

Hacemos los cambios:

$$u = x+1 \Rightarrow du = dx\ ,\ dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

para integrar por partes.

$$I = (x+1)\,e^x - \int e^x\,dx = (x+1)\,e^x - e^x + K = xe^x + K.$$

Problema 7

Calcular las integrales definidas:

$$\text{a) } I_1 = \int_0^1 x \arccos x^2\,dx.$$

b) $I_2 = \int_0^{\pi} e^x \operatorname{sen}(x/2)\, dx.$

Solución:

a) Integramos por partes con los cambios de variable

$$u = \arccos x^2 \Rightarrow du = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

$$dv = x\,dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}.$$

Tendremos:

$$I_1 = \frac{x^2 \arccos x^2}{2}\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{-x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx =$$

$$= \frac{x^2(\arccos x^2)}{2}\Big|_0^1 - -\frac{1}{4}\int_0^1 \frac{-4x^3}{\sqrt{1-x^4}}dx$$

$$= \frac{x^2(\arccos x^2)}{2} - \frac{\sqrt{1-x^4}}{2}\Big|_0^1 = \frac{I}{2}.$$

b) Para resolver I_2 aplicamos reiteradamente la fórmula de integración por partes:

Sea $I_3 = \int e^x \operatorname{sen}(x/2)\, dx$, entonces

$$I_3 = -2e^x \cos(x/2) + \int 2e^x \cos(x/2)\, dx.$$

De nuevo aplicamos el método a $I_4 = \int e^x \cos(x/2)\, dx$

$$u = e^x \Rightarrow du = e^x dx, \quad dv = \cos(x/2)\, dx \Rightarrow v = 2\operatorname{sen}(x/2)$$

por tanto,

$$I_4 = 2e^x \operatorname{sen}(x/2) - 2\int e^x \operatorname{sen}(x/2)dx = 2e^x \operatorname{sen}(x/2) - 2I_2$$

luego

$$I_3 = -2e^x \cos(x/2) + 4e^x \operatorname{sen}(x/2) - 4I_3$$

$$5I_3 = -2e^x \cos(x/2) + 4e^x \operatorname{sen}(x/2)$$

de donde

$$I_3 = 1/5[-2e^x \cos(x/2)+4e^x \operatorname{sen}(x/2)]+ K.$$

En consecuencia,

$$I_2 = \frac{2e^x (2\operatorname{sen}(x/2) - \cos(x/2))}{5}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{2(2e^{\pi} + 1)}{5}.$$

Problema 8

Evaluar la integral

$$I = \int \frac{x-1}{x(x^2+1)}dx.$$

Solución:

El denominador de la función racional tiene la raíz real $x = 0$ y las raíces complejas conjugadas $x = i$, $x = -i$.

La descomposición, en este caso, de la función racional es:

$$\frac{x-1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1) + x(bx+c)}{x(x^2+1)}.$$

Identificando los numeradores:

$$ax^2 + a + bx^2 + cx = x - 1$$

De esta ecuación resulta:

$$a+b = 0,\ \ c = 1,\ \ a = -1 \Rightarrow a = -1,\ \ b = 1 \ \text{ y } \ c = 1.$$

Será, pues:

$$I = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{x+1}{x^2+1}dx = -\operatorname{Ln}|x| + \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}dx + \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -L|x| + \frac{1}{2}L|x^2 + 1| + \text{arctg}x + K$$

Problema 9

Calcular $I = \int \frac{x+2}{x^3 - x} dx$.

Solución

El denominador se descompone de la forma

$$x^3 - x = x(x-1)(x+1)$$

y

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-1)x} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x}.$$

Al operar, se obtiene

$$\frac{x+2}{(x+1)(x-1)x} = \frac{ax(x-1) + bx(x+1) + c(x+1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)} =$$

$$= \frac{(a+b+c)x^2 + (b-a)x - c}{x(x-1)(x+1)},$$

de donde se obtiene un sistema de solución:

$$a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2} \text{ y } c = -2.$$

Por tanto,

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x-1} - 2\int \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{1}{2}Ln|x+1| + \frac{3}{2}Ln|x-1| - 2Ln|x| + K.$$

Problema 10

Evaluar la siguiente integral:

$$I = \int \frac{2x^2 + x + 8}{(x^2 + 4)^2} dx.$$

Solución

La integral se descompone en

$$I = \int \frac{2(x^2 + 4)}{(x^2 + 4)^2} dx + \int \frac{x}{(x^2 + 4)^2} dx =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{2}}{(\frac{x}{2})^2 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2 + 4)^2} dx,$$

para calcular la última integral realizamos el cambio de variable:

$$t = x^2 + 4, \quad dt = 2x\, dx$$

de donde

$$I = \operatorname{arctg}(\frac{x}{2}) + \frac{1}{2} \int t^{-2} dt = \operatorname{arctg}(\frac{x}{2}) - \frac{1}{2(x^2 + 4)} + K.$$

Problema 11

Calcular la siguiente integral:

$$I = \int \frac{x^2 + 2x - 1}{x^6 + 2x^4 + x^2} dx.$$

Solución:

Descomponemos el denominador en factores:

$$x^6 + 2x^4 + x^2 = x^2(x^4 + 2x^2 + 1) = x^2(x^2 + 1)^2,$$

como tiene raíces múltiples, tanto reales como complejas, utilizaremos el método de Hermite.

$$Q(x) = x^2 (x^4 + 2x^2 + 1) = x^2 (x^2 + 1)^2,$$

$$Q'(x) = 2x(x^2 + 1)^2 + x^2 (x^2 + 1)\, 2\,(2x) = (x^2 + 1)2x(3x^2 + 1),$$

$$B_1 (x) = \text{m.c.d.}(Q(x), Q'(x)) = x(x^2 + 1),$$

$$B_2 (x) = \frac{Q(x)}{B_1 (x)} = x(x^2 + 1).$$

Entonces

$$I = \frac{ax^2 + bx + c}{x(x^2 + 1)} + \int \frac{dx^2 + ex + f}{x(x^2 + 1)} dx \ .$$

Calculamos los coeficientes.

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 (x^2 + 1)^2} = \left(\frac{ax^2 + bx + c}{x(x^2 + 1)} \right)' + \frac{dx^2 + ex + f}{x(x^2 + 1)} =$$

$$\frac{(2ax + b)\, x\, (x^2 + 1) - (3x^2 + 1)\, (ax^2 + bx + c) + (dx^2 + ex + f)\, x\, (x^2 + 1)}{x^2 (x^2 + 1)^2}$$

Operando e identificando coeficientes, resulta un sistema de solución:

$$a = 2, b = 1, c = 1, d = 0, e = 2, f = 2.$$

Por tanto

$$I = \frac{2x^2 + x + 1}{x(x^2 + 1)} + \int \frac{2x + 2}{x(x^2 + 1)} dx =$$

$$= \frac{2x^2 + x + 1}{x(x^2 + 1)} + \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{-2x + 2}{x^2 + 1} dx =$$

$$= \frac{2x^2 + x + 1}{x(x^2 + 1)} + 2\text{Ln}|x| - \text{Ln}|x^2 + 1| + 2\text{arctg}x \ =$$

$$= \frac{2x^2 + x + 1}{x\,(x^2 + 1)} + \mathrm{Ln}\left|\frac{x^2}{x^2 + 1}\right| + 2\,\mathrm{arctg}\,x + K.$$

Problema 12

Calcular la integral indefinida de la función:

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{sen}\,3x + \mathrm{sen}\,x}\ .$$

Solución:

Recordando que

$$\mathrm{sen}\,3x + \mathrm{sen}\,x = 2\,\mathrm{sen}\,2x\cos x = 4\,\mathrm{sen}x\cos^2 x,$$

tendremos que

$$\int f(x)\,dx = \int \frac{dx}{4\,\mathrm{sen}x\cos^2 x} = 1/4 \int \frac{\mathrm{sen}x\,dx}{\mathrm{sen}^2 x\cos^2 x}.$$

Haciendo el cambio $t = \cos x$, $dt = -\mathrm{sen}\,x\,dx$ resulta

$$\int f(x)\,dx = -1/4 \int \frac{dt}{t^2\,(1 - t^2)}.$$

Una descomposición en fracciones simples da:

$$\frac{1}{t^2\,(1 - t^2)} = \frac{1}{t^2} + \frac{1}{1 - t^2} = \frac{1}{t^2} + \frac{1/2}{1 - t} + \frac{1/2}{1 + t}$$

de donde

$$\int f(x)\,dx = \frac{1}{4t} + 1/8\,\mathrm{Ln}|1-t| - 1/8\,\mathrm{Ln}|1+t| + K =$$

$$= \frac{1}{4\cos x} + 1/8\,\mathrm{Ln}\left|\frac{1 - t}{1 + t}\right| + K =$$

$$= \frac{1}{4\cos x} + \mathrm{Ln}\left|\sqrt[8]{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}\right| + K.$$

Problema 13

Calcular

$$I=\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}.$$

Solución:

Con el cambio de variable

$$x=\operatorname{tg}\alpha,\quad dx=\sec^2\alpha\, d\alpha$$

el radicando del denominador se convierte en

$$\sqrt{1+x^2}=\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha+1}=\sec\alpha$$

Entonces

$$I=\int \frac{\sec^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\sec\alpha}d\alpha=\int \operatorname{cosec}\alpha d\alpha=-\operatorname{Ln}|\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha|+K=$$

$$=-\operatorname{Ln}\left|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right|=-\operatorname{Ln}\left|\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{x}\right|+K.$$

Problema 14

Calcular

$$I=\int\sqrt{\frac{x+1}{1-2x}}dx.$$

Solución:

Hacemos el cambio:

$$\frac{x+1}{1-2x}=t^2,\quad x=\frac{t^2-1}{1+2t^2},\quad dx=\frac{6tdt}{(1+2t^2)^2}.$$

$$I=\int\frac{6t^2dt}{(1+2t^2)^2}$$

Hemos reducido la integral a una integral racional que resolvemos por el método de Hermite.

$$Q(t)=(1+2t^2)^2 \Rightarrow Q'(t)=2(1+2t^2)4t.$$

$$B_1(t)=\text{m.c.d.}(Q,Q')=(1+2t^2),\ B_2(t)=(1+2t^2).$$

. Sea

$$I_1=\int\frac{t^2}{(1+2t^2)^2}dt=\frac{at+b}{1+2t^2}+\int\frac{ct+d}{1+2t^2}dt\,.$$

Calculamos a, b, c y d.

$$\frac{t^2}{(1+2t^2)^2}=\frac{a(1+2t^2)-(at+b)4t}{(1+2t^2)^2}+\frac{ct+d}{1+2t^2}\,.$$

Operando e identificando coeficientes resulta un sistema de solución:

$$a=-1/4,\ b=0,\ c=0 \text{ y } d=1/4.$$

Por tanto

$$I_1=\frac{(-\frac{1}{4})t}{(1+2t^2)}+\int\frac{\frac{1}{4}}{1+2t^2}dt=\frac{(-\frac{1}{4})t}{(1+2t^2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\text{arctg}\,(\sqrt{2}t)+k\,.$$

Luego

$$I=\frac{-3\sqrt{\frac{x+1}{1-2x}}}{(1+\frac{2(x+1)}{1-2x})2}+\frac{3\sqrt{2}}{4}\text{arctg}\,(\sqrt{\frac{2(x+1)}{1-2x}})+K\,.$$

Problema 15

Hallar una primitiva de la función racional

$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-2x+5}.$$

Solución

Teniendo en cuenta que el denominador se puede escribir en la forma $(x-a)^2+b^2$:

$$\frac{x-3}{x^2-2x+5} = \frac{x-3}{(x-1)^2+4} = \frac{x-1-2}{(x-1)^2+4} =$$

$$= \frac{x-1}{(x-1)^2+4} + \frac{-2}{(x-1)^2+4}.$$

Por tanto

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{2(x-1)}{(x-1)^2+4} - \frac{1}{2}\frac{1}{(\frac{x-1}{2})^2+1},$$

cuya primitiva es

$$F(x) = 1/2\ Ll(x-1)^2+4l - \text{arc tg}\ \frac{x-1}{2}.$$

Problema 16

Calcular $I = \int \frac{dx}{(x^2+1)\ (x-2)^2}$.

Solución

Descomponemos la función integrando teniendo en cuenta que el denominador tiene la raíz doble $x=2$, $x=i$ y $x=-i$.

$$\frac{1}{(x^2+1)\,(x-2)^2} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{(x-2)^2} + \frac{cx+d}{x^2+1} =$$

$$= \frac{a\,(x-2)\,(x^2+1) + b\,(x^2+1) + (cx+d)\,(x-2)^2}{(x-2)^2\,(x^2+1)}.$$

Identificando los numeradores, operando y ordenando, obtenemos

$$1 = (a+c)x^3 + (-2a+b+d-4c)x^2 + (a-4d+4c) + (-2a+b+4d),$$

de donde identificando coeficientes se obtiene un sistema de solución:

$$a = -4/25,\ b = 1/5,\ c = 4/25 \ \text{ y } \ d = 3/25.$$

Luego:

$$I = -\frac{4}{25}\int\frac{dx}{x-2} + \frac{1}{5}\int\frac{dx}{(x-2)^2} + \int\frac{\frac{4}{25}x + \frac{3}{25}}{x^2+1}dx =$$

$$= \left(-\frac{4}{25}\right)\mathrm{Ln}|x-2| - \frac{1}{5\,(x-2)} + \frac{2}{25}\int\frac{2x\,dx}{x^2+1} + \frac{3}{25}\int\frac{dx}{x^2+1} =$$

$$\left(-\frac{4}{25}\right)\mathrm{Ln}|x-2| - \frac{1}{5\,(x-2)} + \frac{2}{25}\mathrm{Ln}|x^2+1| + \frac{3}{25}\mathrm{arctg}\,x + K.$$

Problema 17

Calcular $\int \mathrm{sen}^5 x\,dx - 2\int \mathrm{sen}^3 x\cos^3 x\,dx.$

Solución

La primera integral es

$$\int \mathrm{sen}^5 x\,dx = \int \mathrm{sen}x\,(\mathrm{sen}\,x)^4 dx = \int \mathrm{sen}\,x\,(\mathrm{sen}^2 x)^2 dx =$$

$$= \int \mathrm{sen}\,x\,(1-\cos^2 x)^2\,dx = \int \mathrm{sen}\,x\,(1-2\cos^2 x+\cos^4 x)\,dx =$$

$$= \int \mathrm{sen}\,x\,dx - 2\int \mathrm{sen}\,x\cos^2 x\,dx + \int \mathrm{sen}x\cos^4 x\,dx =$$

$= -\cos x + 2/3 \cos^3 x - 1/5 \cos^5 x + K.$

Veamos ahora la segunda integral

$$\int \operatorname{sen} x \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, dx = \int \operatorname{sen} x (1-\cos^2 x) \cos^3 x \, dx =$$

$$= \int \operatorname{sen} x \cos^3 x \, dx - \int \operatorname{sen} x \cos^5 x \, dx =$$

$$= -1/4 \cos^4 x + 1/6 \cos^6 x + K.$$

Por tanto la expresión pedida es

$$-1/3 \cos^6 x - 1/5 \cos^5 x + 1/2 \cos^4 x + 2/3 \cos^3 x - \cos x + K.$$

Problema 18

Calcular $I = \int \sec^4 2x \, tg^5 2x \, dx.$

Solución

Por ser la potencia de la secante par, separamos un factor $\sec^2 2x$ para poder considerar $u = tg\, 2x$, $du = 2\sec^2 2x \, dx$.

$$I = \frac{1}{2}\int \sec^2 2x \, tg^5 2x \, (2\sec^2 2x dx) = \frac{1}{2}\int (1 + tg^2 2x)\, tg^5 2x \, (2\sec^2 2x dx)$$

$$= \frac{1}{2}\int (tg^5 2x + tg^7 2x)\, 2\sec^2 2x dx = \left(\frac{tg^6 2x}{6} + \frac{tg^8 2x}{8}\right)\frac{1}{2} + K.$$

Problema 19

Calcular

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{x - x^2}}.$$

Solución

Ya que el radicando se puede escribir como $\frac{1}{4} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$, nos interesa

hacer el cambio de variable

$$x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\text{sen}t\ ,\quad dx=\frac{1}{2}\text{cos}tdt,$$

con lo que

$$\sqrt{x-x^2}=\frac{1}{2}\text{cos}t$$

y entonces

$$I=\int\frac{(1/2)\,\text{cos}tdt}{(1/2)\,\text{cos}t}=t+K=\text{arcsen}\,(2x-1)+K.$$

Problema 20

Calcular

$$I=\int\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x-2}dx.$$

Solución

$I=\int\frac{\sqrt{x^2-4x}}{x-2}dx$, es del tipo $\sqrt{u^2-m^2}$ con $m=2$. Por tanto, haciendo:

$$x\text{-}2=2\,\text{sec}\alpha\,,\ dx=2\,\text{sec}^2\alpha\text{tg}\alpha\,d\alpha\,,\ \sqrt{(x-2)^2-4}=2\text{tg}\alpha$$

se tiene

$$I=\int\frac{2\text{tg}\alpha}{2\text{sec}^2\alpha}2\text{sec}\alpha\text{tg}\alpha d\alpha=2\int\text{tg}^2\alpha d\alpha=$$

$$=2\left(\int(\text{tg}^2\alpha+1)\,d\alpha-\int d\alpha\right)=2\,(\text{tg}\alpha-\alpha)+K=$$

$$=\sqrt{x^2-4x}-2\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{x^2-4x}}{2}\right)+K.$$

Problema 21

Calcular

$$I = \int \frac{dx}{x^4\sqrt{1+x^6}}.$$

Solución

La integral es del tipo binómica, por tanto, aplicamos el método de resolución específico de este tipo de integrales.

Sea $x^6 = t$, $x = \sqrt[6]{t}$, $dx = \frac{1}{6}t^{-5/6}dt$.

Sustituyendo en I resulta que:

$$I = \frac{1}{6}\int \frac{t^{-5/6}dt}{t^{2/3}\sqrt{1+t}} = \frac{1}{6}\int t^{-3/2}(1+t)^{-1/2}dt.$$

Al ser -3/2-1/2 = -2∈ **Z**, es del tercer tipo.

Se hace el cambio

$$\frac{1+t}{t} = z^2, t = \frac{1}{z^2-1}, dt = \frac{-2zdz}{(z^2-1)^2}$$

y resulta

$$I = (-\frac{1}{3})\int (z^2-1)^{3/2}\left(\frac{z^2}{(z^2-1)}\right)^{-1/2}\frac{zdz}{(z^2-1)^2} =$$

$$= (-\frac{1}{3})\int dz = (-\frac{1}{3})z + K = (-\frac{1}{3})\sqrt{\frac{1+x^6}{x^6}} + K.$$

Problema 22

Hallar

$$I = \int \frac{dx}{(x-3)\sqrt{x+3}}.$$

Solución

Sea $x+3 = z^2$, $x = z^2 - 3$, $dx = 2z\,dz$, entonces

$$I = 2\int \frac{z\,dz}{z(z^2-6)} = 2\int \frac{dz}{z^2-6} = \frac{1}{\sqrt{6}}\int \left(\frac{1}{z-\sqrt{6}} - \frac{1}{z+\sqrt{6}}\right) dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{Ln}\left|\frac{z-\sqrt{6}}{z+\sqrt{6}}\right| + K = \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{Ln}\left|\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{6}}{\sqrt{x+3}+\sqrt{6}}\right| + K.$$

Problema 23

Probar que si la función f está definida en el intervalo [0,1] se tiene:

$$I = \int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 [f(x) + f(1-x)]\,dx.$$

Solución

Haciendo el cambio de variable

$$x = 1-t \quad , \quad dx = -dt$$

resulta

$$I = -\int_1^0 f(1-t)\,dt = \int_0^1 f(1-t)\,dt.$$

Por tanto,

$$2I = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_0^1 f(1-x)\,dx,$$

luego,

$$I = \frac{1}{2}\int_0^1 [f(x) + f(1-x)]\,dx.$$

Problema 24

Demostrar que si f es una función par, en **R**, se tiene:

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Como aplicación calcular

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\,dx.$$

Solución

$$I = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

Si hacemos en $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ el cambio de variable:

$$x = -t\ ,\quad dx = -dt$$

se tiene

$$I = -\int_a^0 f(-t)\,dt = \int_0^a f(-t)\,dt.$$

Si f es una función par $f(t) = f(-t)$ y

$$\int_0^a f(-t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt.$$

Por tanto

$$I = \int_0^a f(t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Como f(x) = cos 2x es una función par, aplicando la fórmula anterior, resulta:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2x\,dx = 2\int_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx = 2\frac{\operatorname{sen} 2x}{2}\Big|_0^{\pi/4} = 1.$$

Problema 25

Calcular

$$I = \int \frac{dx}{e^{2x} + 4e^x}.$$

Solución

Sea $t = e^x$, $x = \operatorname{Ln} t$, $dx = \frac{dt}{t}$. Entonces,

$$I = \int \frac{1/t}{t^2 + 4t}\,dt = \int \frac{dt}{t^2(t+4)} = \int \left(\frac{a}{t} + \frac{b}{t^2} + \frac{c}{t+4}\right) dt =$$

$$= \left(-\frac{1}{16}\right) \operatorname{Ln}|t| - \frac{1}{4}\frac{1}{t} + \frac{1}{16}\operatorname{Ln}|t+4| + K =$$

$$= -\frac{1}{4e^x} + \frac{1}{16}\operatorname{Ln}\left|\frac{e^x + 4}{e^x}\right| + K.$$

Problema 26

Calcular la siguiente integral

$$I = \int \frac{\sqrt{x}}{(1-x)^2} dx \ .$$

Solución

El cambio de variable más apropiado es:

$$x = z^2, \quad dx = 2z\,dz,$$

así resulta:

$$I = \int \frac{z2zdz}{(1-z^2)^2} = 2\int \frac{z^2}{(1-z^2)^2} dz = 2\int \frac{z^2}{(1-z)^2(1+z)^2} dz.$$

Descomponemos el integrando en fracciones simples

$$\frac{z^2}{(1-z)^2(1+z)^2} = \frac{a}{1-z} + \frac{b}{(1-z)^2} + \frac{c}{1+z} + \frac{d}{(1+z)^2} =$$

$$= \frac{-1/4}{1-z} + \frac{1/4}{(1-z)^2} + \frac{-1/4}{1+z} + \frac{1/4}{(1+z)^2}.$$

Por tanto ,

$$I = -\frac{1}{2}\mathrm{Ln}|1-z| - \frac{1}{2}\frac{1}{1-z} - \frac{1}{2}\mathrm{Ln}|1+z| - \frac{1}{2}\frac{1}{1+z} + k =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\mathrm{Ln}|1-\sqrt{x}| + \frac{1}{1-\sqrt{x}} + \mathrm{Ln}|1+\sqrt{x}| + \frac{1}{1+\sqrt{x}}\right) + K.$$

Tema 9

Integrales Impropias

Problema 1

Calcular $I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx$, con $p > 1$. Ver que para $p \leq 1$ la integral no es convergente.

Solución

Como la función $\frac{1}{x^p}$ solo puede ser discontinua en $x = 0$ (y esto si $p > 0$) estamos frente a un claro caso de integral impropia de primera especie pues en el intervalo $[1,\infty)$ no hay discontinuidades.

Si $p \neq 1$ entonces

$$\int \frac{1}{x^p} dx = \frac{x^{1-p}}{1-p}$$

por tanto

$$I = \int_1^{\infty} \frac{1}{x^p} dx = \lim_{u \to \infty} \int_1^u \frac{1}{x^p} dx = \lim_{u \to \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_1^u = \lim_{u \to \infty} \frac{u^{1-p} - 1}{1-p}.$$

Distingamos dos casos:

- $p > 1$, entonces

$$I = \lim_{u \to \infty} \frac{1}{1-p} \left(\frac{1}{u^{p-1}} - 1 \right) = \frac{1}{p-1}$$

por lo que la integral converge y tiene valor $\frac{1}{p-1}$.

- $p < 1$, entonces

$$I = \lim_{u \to \infty} \frac{1}{1-p} \left(u^{1-p} - 1 \right) = +\infty$$

pues $1-p > 0$, por lo que la integral diverge.

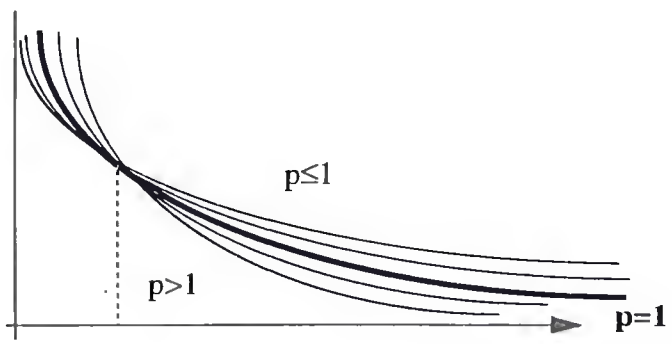
El caso $p = 1$ tiene que ser tratado aparte pues $\int \frac{1}{x} dx = Lnx$. En este caso

$$I = \lim_{u \to \infty} \int_1^u \frac{1}{x} dx = \lim_{u \to \infty} Lnx \Big|_1^u = \lim_{u \to \infty} (Ln(u) - Ln(1)) =$$

$$= \lim_{u \to \infty} Ln(u) = +\infty.$$

Luego la integral diverge.

La función $1/x^p$ para distintos valores de $p > 0$.



Problema 2

Calcular $I = \int_0^1 Lnx\,dx$.

Solución

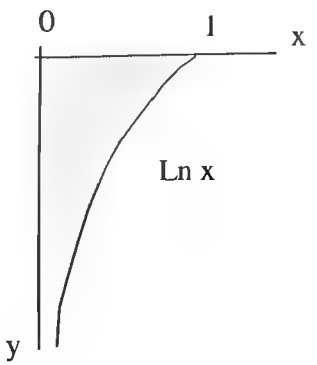
La función $f(x) = Lnx$ es integrable en $[\alpha,1]$ con α un número entre 0 y 1 al ser continua en dicho intervalo; I es una integral impropia de segunda especie ya que $\lim_{x \to 0+} Lnx = -\infty$.

Entonces,

$$I = \lim_{u \to 0+} \int_u^1 Lnx\,dx = \lim_{u \to 0+} (xLnx - x)\Big|_u^1 =$$

$$= \lim_{u \to 0+} (-1 - uLn(u) + u) = -1 - \lim_{u \to 0+} uLn(u) = -1,$$

puesto que por l'Hôpital $\lim_{u \to 0+} uLn(u) = 0$, entonces la integral es convergente e igual a -1.



Problema 3

Estudiemos en función de p la convergencia de la integral $\int_0^{\infty} e^{-px}dx$.

Solución

La función $f(x) = e^{-px}$ es continua luego estamos frente a una integral impropia de primera especie. Además la primitiva es muy sencilla

$$\int e^{-px}dx = (-\frac{1}{p})e^{-px} \quad \text{si } p \neq 0,$$

por tanto,

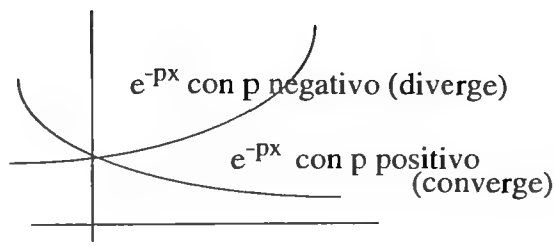
$$\int_0^{\infty} e^{-px}dx = \lim_{u \to \infty} \int_0^{u} e^{-px}dx = \lim_{u \to \infty} \left((-\frac{1}{p})e^{-px} \right) \Big|_0^{u} =$$

$$= \lim_{u \to \infty} (\frac{1}{p} + \frac{1}{p}e^{-pu}).$$

Ahora si $p < 0$ entonces el límite es $+\infty$, luego la integral es divergente.

Si $p > 0$, entonces el límite es $\frac{1}{p}$ con lo que la integral es convergente.

Si $p = 0$, $\int_0^{\infty} 1\,dx = +\infty$ y la integral es divergente.



Problema 4

Estudiar la naturaleza (convergencia o divergencia) de la integral $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^7}\,dx$.

Solución

La función es continua luego es una integral impropia de primera especie; como, además, $f(x) = \frac{e^{-x}}{x^7}$ es positiva en $[1,\infty)$ vamos a utilizar el criterio del cociente comparándola con $g(x) = e^{-x}$ que, por el problema anterior, sabemos que es convergente.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{e^{-x}}{x^7}}{e^{-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^7} = 0,$$

por tanto $\int_1^{\infty} \frac{e^{-x}}{x^7}\,dx$ es convergente.

Problema 5

Estudiar la naturaleza de la integral $I = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(2-x)\,x}}$ y calcularla si es convergente.

Solución

Como el denominador de la función tiene dos raices $x = 0$ y $x = 2$ que son precisamente los límites de integración de la integral podemos descomponer I en dos integrales

$$I_1 = \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(2-x)\,x}} \qquad y \qquad I_2 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(2-x)\,x}}$$

impropias de segunda especie.

Comparamos I_1 con la $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$ que es convergente.

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{(2-x)\,x}}}{\frac{1}{\sqrt{2-x}}} = \lim_{x \to 2^+} \frac{\sqrt{2-x}}{\sqrt{(2-x)\,x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

por tanto es convergente.

La I_2 se resuelve igual por comparación con $\frac{1}{\sqrt{x}}$, resultando ser convergente.

Por tanto I es convergente. Calculemos la primitiva

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \text{arc sen}\,(x-1)$$

Entonces $I = \lim_{u \to 0} \text{arc sen}\,(x-1)\Big|_u^1 + \lim_{v \to 2} \text{arc sen}\,(x-1)\Big|_1^v =$

$$= \lim_{u \to 0} (\text{arc sen}(0) - \text{arc sen}\,(u-1)) + \lim_{v \to 2} (\text{arc sen}\,(v-1) - \text{arc sen}(0))$$

$$= \lim_{v \to 2} \text{arc sen}\,(v-1) - \lim_{u \to 0} \text{arcsen}\,(u-1) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi\,.$$

Problema 6

Supuesto conocida la fórmula $\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$, comprobar que $\int_0^\infty \frac{\text{sen}\,t \cos t}{t} = \frac{\pi}{4}$ y, aplicando la integración por partes, deducir que

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}^2 t}{t^2} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Solución

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\text{sentcost}}{t} dt = \int_0^{\infty} \frac{2\text{sentcost}}{2t} dt = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}2t}{2t} dt.$$

Haciendo $2t = u$ tenemos $dt = \frac{1}{2} du$, entonces

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}u}{u} du = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Sea ahora $I_2 = \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}^2 t dt}{t^2}$, integrando por partes

$$\int \frac{\text{sen}^2 t}{t^2} dt = \left\{ \begin{array}{ll} u = \text{sen}^2 t & du = 2\text{sentcostdt} \\ dv = \frac{1}{t^2} dt & v = -\frac{1}{t} \end{array} \right\} =$$

$$= -\frac{\text{sen}^2 t}{t} + \int \frac{2\text{sentcost}}{t} dt$$

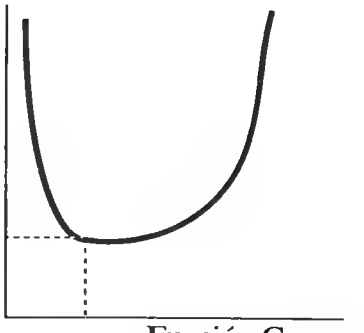
$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen}^2 t}{t^2} dt = \lim_{u \to \infty} \int_0^{u} \frac{\text{sen}^2 t}{t^2} dt = \lim_{u \to \infty} -\frac{\text{sen}^2 t}{t} \Big|_0^{u} + \lim_{u \to \infty} \int_0^{u} \frac{2\text{sentcost}}{t} dt =$$

$$= \lim_{u \to \infty} \left(-\frac{\text{sen}^2 u}{u} + 0\right) + \lim_{u \to \infty} 2 \int_0^{u} \frac{\text{sentcost}}{t} dt = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Problema 7

Probar que para $p>0$ la integral $\Gamma(p)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}dx$ es convergente.

(A esta función se la denomina **función Gamma**).



Función Gamma

Solución

Si $p>0$ la integral impropia $\Gamma(p)=\int_0^{\infty} e^{-x}x^{p-1}dx$ es convergente. En efecto, $\Gamma(p)$ se puede descomponer en suma de dos integrales impropias

$$\Gamma(p)=\int_0^{1} e^{-x}x^{p-1}dx+\int_1^{\infty} e^{-x}x^{p-1}dx=I_1+I_2$$

la primera es de segunda especie en $x=0$ mientras que la segunda es una integral de primera especie.

Estudiemos $I_1=\int_0^{1} e^{-x}x^{p-1}dx$ que vamos a comparar con $\frac{1}{x^{\alpha}}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}x^{p-1}}{x^{-\alpha}}=\lim_{x\to 0}x^{p+\alpha-1}e^{-x}=0\ ,\ \text{si } p+\alpha-1>0.$$

Por tanto, $1-p < \alpha$.

Ahora como la integral $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx$ es convergente si $\alpha < 1$ entonces si $1-p < 1$ (es decir si $p > 0$) entonces I_1 es convergente.

Consideremos ahora $I_2 = \int_1^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$ y comparémosla con $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx$.

$$\lim_{x \to \infty} e^{-x} x^{p-1} x^\alpha = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{p+\alpha-1}}{e^x} = 0$$

para cualquier valor de p y α, y por consiguiente, I_2 es siempre convergente para cualquier valor de p, tomando $\alpha > 1$.

En consecuencia, $\Gamma(p)$ es convergente si $p > 0$.

Problema 8

Probar que si $p > 0$ y $q > 0$ entonces la integral impropia

$$\beta(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \quad \textbf{(Función Beta)}$$

es convergente.

Solución

Esta integral se descompone en dos integrales impropias de segunda especie:

$$\beta(p, q) = \int_0^{1/2} x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx + \int_{1/2}^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = I_1 + I_2$$

(1/2 puede se sustituido por cualquier $a \in (0,1)$).

Aplicando el criterio del cociente a I_1 dividiendo por la función $\frac{1}{x^t}$ se tiene que

$$\lim_{x\to 0} x^{p-1}(1-x)^{q-1}x^t = \lim_{x\to 0}\frac{x^t(1-x)^{q-1}}{x^{1-p}} = 1, \text{ si } 1\text{-}p = t,$$

ahora bien si $t < 1$ entonces es convergente. Por tanto I_1 es convergente si $1\text{-}p < 1$, es decir, si $p > 0$.

Aplicando ahora el criterio del cociente a I_2 dividiendo por $\frac{1}{(1-x)^t}$ resulta que

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{p-1}(1-x)^t}{(1-x)^{1-q}} = 1, \quad \text{si } t = 1\text{-}q,$$

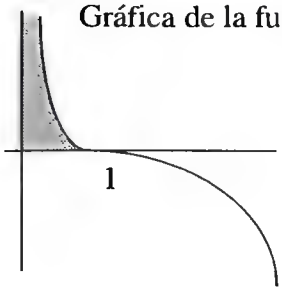
ahora bien, si $1 > t$ la integral $\int_{1/2}^{1}\frac{dt}{(1-x)^t}$ es convergente, por tanto, $1 > 1\text{-}q$ y $q > 0$.

Luego si $q > 0$ entonces I_2 es convergente.

Problema 9

Calcular $\int_0^1 (\mathrm{Ln}(\frac{1}{x}))^3\, dx$.

Gráfica de la función



Solución

Hacemos el cambio $\text{Ln}(\frac{1}{x}) = u$ entonces $x = e^{-u}$, por lo que $dx = (-e^{-u})\,du$ y según el problema 7 se tiene

$$\int_0^1 (\text{Ln}(\frac{1}{x}))^3 dx = \int_0^\infty u^3 e^{-u} du = \Gamma(p) \quad \text{donde } p\text{-}1 = 3 \text{ y } p = 4,$$

por tanto, la integral vale $\Gamma(4) = 3! = 6$.

Observación: Se podría haber hecho directamente pues

$$\int (\text{Ln}(\frac{1}{x}))^3 dx = x(\text{Ln}(\frac{1}{x}))^3 + 3x(\text{Ln}(\frac{1}{x}))^2 + 6x\text{Ln}(\frac{1}{x}) + 6x,$$

luego

$$I = \int_0^1 (\text{Ln}(\frac{1}{x}))^3 dx = \lim_{u \to 0^+} \int_u^1 (\text{Ln}(\frac{1}{x}))^3 dx = 6.$$

Problema 10

Calcular $\int_0^\infty e^{-x^2} x^5 dx.$

Solución

Hacemos el cambio $x^2 = t$, por tanto $x = t^{1/2}$ y $dx = \frac{1}{2}t^{-1/2}dt$ y entonces tenemos

$$I = \int_0^\infty e^{-x^2} x^5 dx = \int_0^\infty \frac{1}{2} e^{-t} t^{5/2} t^{-1/2} dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-t} t^2 dt = \frac{1}{2}\Gamma(3) = 1.$$

Problema 11

Calcular $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x \cos^6 x\,dx$.

Solución

Al utilizar la función beta (ver problema 8) tenemos que

$$I = \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x \cos^6 x\,dx = \frac{1}{2}\beta(p, q),$$

donde $2p-1=4$ y $2q-1=6$, luego $p=\frac{5}{2}$ y $q=\frac{7}{2}$.

$$I = \frac{1}{2}\beta\left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(5/2)\cdot\Gamma(7/2)}{\Gamma(6)} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(1/2)\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(1/2)}{5!} = \frac{3^2\cdot 5\cdot\pi}{2^6\cdot 5!} = \frac{3\pi}{512}.$$

Problema 12

Calcular $I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1}{(\operatorname{tg} x)^{1/2}} + \frac{1}{(\operatorname{cotg} x)^{1/2}}\right)dx$.

Solución

$$I = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{(\cos x)^{1/2}}{(\operatorname{sen} x)^{1/2}} + \frac{(\operatorname{sen} x)^{1/2}}{(\cos x)^{1/2}}\right)dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{(\operatorname{sen} x)^{1/2}(\cos x)^{1/2}}dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{1/2} (\operatorname{sen} x)^{-1/2} dx + \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{1/2} (\cos x)^{-1/2} dx.$$

Utilizando la forma trigonométrica de la función beta, se tiene que

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} (\cos x)^{1/2} (\operatorname{sen} x)^{-1/2} dx = \frac{1}{2}\beta(p, q) \quad \text{donde}$$

$$2p-1 = -1/2 \quad y \quad p = 1/4$$
$$2q-1 = 1/2 \quad y \quad q = 3/4$$

luego

$$I_1 = \frac{1}{2}\beta(1/4, 3/4).$$

Análogamente

$$I_2 = \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen} x)^{1/2} (\cos x)^{-1/2} dx = \frac{1}{2}\beta(p', q') \quad \text{donde}$$

$$2p'-1 = 1/2 \quad y \quad p' = 3/4$$
$$2q'-1 = -1/2 \quad y \quad q' = 1/4$$

por tanto,

$$I = \frac{1}{2}\beta(3/4, 1/4) + \frac{1}{2}\beta(1/4, 3/4) = \beta(1/4, 3/4) =$$

$$= \frac{\Gamma(3/4)\,\Gamma(1/4)}{\Gamma(1)} = \Gamma(3/4) \cdot \Gamma(1/4)$$

por la fórmula de los complementos

$$I = \Gamma(3/4) \cdot \Gamma(1/4) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} = \pi\sqrt{2}.$$

Problema 13

Calcular $\int_1^{\infty} e^{-3x}dx$.

Solución

La función $f(x) = e^{-3x}$ de $[0,\infty)$ en $\mathbf{R}^+$ es continua luego es localmente integrable. Luego podemos aplicar la definición de la integral impropia de primera especie:

$$I = \int_1^{\infty} e^{-3x}dx = \lim_{u\to\infty} \int_1^{u} e^{-3x}dx = \lim_{u\to\infty} -\frac{1}{3}e^{-3x}\Big|_1^u =$$

$$= \lim_{t\to\infty} -\frac{1}{3}(e^{-3x} - e^{-3}) = \frac{1}{3}e^{-3}.$$

Problema 14

Sea $b > a$, entonces $\int_a^u \frac{1}{(b-x)^p}dx$ converge si y sólo si $1 > p$.

Solución

El problema podría hacerse directamente, pero vamos a utilizar el cambio de variable y los criterios conocidos por el problema 1.

La función $f(x) = \frac{1}{(b-x)^p}$ tiene como asíntota $x = b$ en el caso $p > 0$, luego es localmente integrable en $[a,b)$. Si $p \leq 0$ la función es continua en $[a,b)$ y se extiende continuamente a $[a,b]$ por lo que de nuevo es localmente integrable. Entonces,

$$I = \int_a^u \frac{1}{(b-x)^p}\,dx = \lim_{u \to b-} \int_a^u \frac{1}{(b-x)^p}\,dx$$

Haciendo el cambio $y = \frac{b-a}{b-x}$, de donde $x = b - \frac{(b-a)}{y}$ y $dx = \frac{(b-a)}{y^2}\,dy$, se tiene

$$\int_a^u \frac{1}{(b-x)^p}\,dx = \int_1^{\frac{b-a}{b-u}} \frac{y^p}{(b-a)^p}\,\frac{(b-a)}{y^2}\,dy = \frac{1}{(b-a)^p} \int_1^{\frac{b-a}{b-u}} \frac{(b-a)}{y^{2-p}}\,dy =$$

$$= \frac{1}{(b-a)^{p-1}} \int_1^{\frac{b-a}{b-u}} \frac{1}{y^{2-p}}\,dy$$

luego

$$I = \lim_{u \to b-} \frac{1}{(b-a)^{p-1}} \int_1^{\frac{b-a}{b-u}} \frac{1}{y^{2-p}}\,dy =$$

$$= \frac{1}{(b-a)^{p-1}} \int_1^{\infty} \frac{1}{y^{2-p}}\,dy .$$

Por el problema 1 , la integral I converge si y sólo si $2-p > 1$ lo que equivale a que $1 > p$.

Problema 15

Calcular $I_1 = \int_0^1 Ln^2 x \, dx$.

Solución

Esta integral impropia de segunda especie puede ser calculada directamente por medio del cálculo de primitivas.

$$\int Ln^2 x \, dx = x\,Ln^2 x - 2x\,Ln\,x + 2x$$

luego

$$I_1 = \lim_{u \to 0+} \int_u^1 Ln^2 x \, dx = \lim_{u \to 0+} (2 - (uLn^2 u - 2uLnu + 2u)) = 2.$$

Por tanto podemos deducir que es convergente sin necesidad de utilizar ningún criterio de convergencia.

Problema 16

Calcular $I = \int_0^1 \sqrt[4]{Ln\,(\frac{1}{x})}\, dx.$

Solución

Hacemos el cambio $t = Ln(1/x)$, entonces $x = e^{-t}$ y $dx = -e^{-t}dt$ y los límites de integración pasan de $x = 1$ a $t = 0$ y $x = 0$ a $t = \infty$, por tanto,

$$I = \int_0^\infty e^{-t} t^{1/4} dt = \Gamma(p) \quad \text{siendo} \quad p = \frac{5}{4},$$

es decir, $I = \Gamma(\frac{5}{4})$. Utilizando tablas, este valor puede ser aproximado por 0.906402.

Problema 17

Calcular $I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^4}\,dx$.

Solución

Haciendo el cambio $x^4 = t$ se tiene que $dx = 1/4\ t^{-3/4}$ y además la integral se convierte en

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)^{1/2} t^{-3/4}\,dt$$

Si $p-1 = -3/4$, entonces $p = 1/4$.

Si $q-1 = 1/2$, entonces $q = 3/2$.

Por tanto,

$$I = \frac{1}{4}\beta\left(\frac{1}{4}, \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{7}{4}\right)}.$$

Problema 18

Probar que no existe la integral $\int_0^\infty \cos x\,dx$.

Solución

Sea J la función definida por la integral $J(t) = \int_0^t \cos x\,dx$.

Por la periodicidad de la función cos x se tiene que $J(2k\pi) = 0$ y $J(2k\pi+\pi/2) = 1$ para todo $k \in \mathbf{Z}$, por lo que no existe el límite de la integral.

Problema 19

Probar que la integral $\int_0^{\infty} \cos^n t e^{-t^3} dt$ es absolutamente convergente.

Solución

Como $\left|\cos^n t e^{-t^3}\right| \le e^{-t^3}$, basta probar que $\int_0^{\infty} e^{-t^3} dt$ es convergente. Para ello se utiliza el criterio del cociente, comparando las funciones e^{-t^3} y $\frac{1}{1+t^2}$.

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t^3}}{\frac{1}{1+t^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1+t^2}{e^{t^3}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2t}{3t^2 e^{t^3}} = \lim_{t\to\infty} \frac{2}{e^{t^3} 3t} = 0.$$

$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt < +\infty$, pues, por el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \operatorname{arcotg} x\Big|_0^{\infty} = \frac{\pi}{2}.$$

Problema 20

La integral $I = \int_1^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t^2} dt$ es convergente.

Solución

Utilizamos el Criterio de Abel de convergencia de integrales impropias.

Sean $f(t)=\text{sent}$ y $g(t)=\frac{1}{t^2}$.

1. $\left|\int_x^y \text{sent}\,dt\right| \le 2$ para todo $x,y\in[1,+\infty)$
2. $\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t^2}=0$
3. $g(t)$ es monótona decreciente y positiva.

Luego I es convergente.

Observación: Esta integral es típica porque no puede encontrarse una primitiva, por tanto, no es posible determinar la convergencia por métodos directos.

Problema 21

Estudiar el caracter de convergencia de la integral $I=\int_4^6 \frac{\text{Ln}x}{(x-4)^3}dx$.

Solución

$I=\int_4^6 \frac{\text{Ln}x}{(x-4)^3}dx$, es una integral impropia de segunda especie en el extremo $x=4$.

Al aplicar el criterio del cociente, con la función $\frac{1}{(x-4)^p}$, se tiene,

$$\lim_{x\to 4}\frac{\text{Ln}x\,(x-4)^p}{(x-4)^3}=\text{Ln}(4) \text{ si } p=3\ge 1.$$

Como $\int_4^6 \frac{1}{(x-4)^p}dx$ es divergente si $p\ge 1$, entonces I es divergente.

Tema 10

Series

Problema 1

Hallar para la serie

$$\frac{2}{3}+\frac{2}{15}+\frac{2}{35}+\ldots$$

a) Las cinco primeras sumas parciales.

b) El término general de la sucesión de las sumas parciales.

Solución

a) Sea

$$X_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n$$

el término general de la sucesión de las sumas parciales. Entonces

$$X_1 = x_1 = \frac{2}{3}, X_2 = x_1+x_2 = \frac{4}{5}, X_3 = x_1+x_2+x_3 = \frac{6}{7}, X_4 = x_1+x_2+x_3+x_4 = \frac{8}{9} \text{ y}$$

$$X_5 = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = \frac{10}{11}.$$

b) A la vista de los resultados anteriores podemos deducir que el término general de la sucesión de las sumas parciales es:

$$X_n = \frac{2n}{2n+1}.$$

Problema 2

Hallar las cinco primeras sumas parciales de la serie

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots \quad .$$

Solución

En primer lugar, hallamos el término general x_n de la sucesión mediante la cual viene definida la serie:

$$x_n = \frac{1}{n(n+2)} \ .$$

Por tanto, los cinco primeros términos de la sucesión de las sumas parciales son:

$$X_1 = x_1 = \frac{1}{3}\ ; X_2 = X_1 + x_2 = \frac{1}{3}+\frac{1}{8} = \frac{11}{24}\ ; X_3 = X_2 + x_3 = \frac{11}{24}+\frac{1}{15} = \frac{21}{40}\ ;$$

$$X_4 = X_3 + x_4 = \frac{21}{40}+\frac{1}{24} = \frac{17}{30}\ ; X_5 = X_4 + x_5 = \frac{17}{30}+\frac{1}{35} = \frac{25}{42}\ .$$

Problema 3

Usar la sucesión de las sumas parciales de la serie:

$$2/10 + 2/100 + 2/1000 + \ldots$$

para probar que es convergente y calcular su suma.

Solución:

Por cálculo podemos ver que

$$X_{10} = 0{,}2222222222$$

$$X_{20} = 0{,}22222222222222222222$$

parece, entonces, concluir que la serie converge a 0,2.

Para asegurarnos podemos desarrollar una fórmula para X_n, observando que se trata de una progresión geométrica de razón 1/10. Por tanto,

$$X_n = \frac{x_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{\frac{2}{10}\left(1-\frac{1}{10^n}\right)}{1-\frac{1}{10}} .$$

Hallando el límite de la expresión anterior cuando n tiende a ∞, y teniendo en cuenta que $\frac{1}{10^n}$ converge a 0, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \frac{\frac{2}{10}}{\frac{9}{10}} = 2/9 = 0{,}2\overline{.}$$

Problema 4

Dada la serie $-\frac{5}{2}, -\frac{5}{4}, -\frac{5}{8}, -\frac{5}{16}, \ldots,$

determinar si es convergente y, en caso afirmativo, calcular su suma.

Solución

La serie tiene por término n-ésimo $x_n = -5\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Por tratarse de una progresión geométrica de razón $\frac{1}{2}$, su suma parcial n-ésima es

$$X_n = \frac{x_1(1-r^n)}{1-r} = \frac{-\frac{5}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(\frac{1}{2}\right)} =$$

$$= -5\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] .$$

Como $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ converge a 0 cuando n tiende a ∞,

$$\lim_{n \to \infty} X_n = -5 ,$$

lo que significa que la serie converge a -5 .

Problema 5

Determinar el carácter de las series:

a) $\sum\left(\frac{5}{3}\right)^n$.

b) $\sum(-0{,}2)^n$.

En caso de ser convergentes, calcular su suma.

Solución

a) Usamos el criterio del término n-ésimo o condición necesaria para que una serie sea convergente:

$$\lim_{n \to \infty}\left(\frac{5}{3}\right)^n = \infty \neq 0 ,$$

por tanto, la serie no puede ser convergente. Al ser de términos positivos es una serie divergente y su suma es $+\infty$.

b) Es convergente por ser una serieabsolutamente convergente ya que la serie $\sum(-0{,}2)^n$ es una serie geométrica de razón menor que 1. Su suma vale:

$$\sum(-0{,}2)^n = \frac{x_1}{1-r} = \frac{-0{,}2}{1-(-0{,}2)} = \frac{-1}{6} .$$

Problema 6

Estudiar el carácter de la serie

$$\sum \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{3n}.$$

Solución:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{3n} = \frac{\sqrt{1}}{3} = \frac{1}{3} \neq 0,$$

de lo que, utilizando el criterio del término n-ésimo, se deduce que la serie es divergente.

Problema 7

Usar el primer criterio de comparación para decidir la convergencia o no de la serie

$$\sum \frac{1 + 3^n}{2^n}.$$

Solución:

La serie $\Sigma(3/2)^n$ es una serie geométrica de razón $r = \frac{3}{2}$ mayor que 1 y, por tanto, divergente. Comparando término a término, tenemos

$$x_n = \frac{1 + 3^n}{2^n} > \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Usamos el primer criterio de comparación, y se concluye que la serie dada es divergente.

Problema 8

Demostrar la convergencia de la serie

$$\sum \frac{n^2 + n}{2n^5 - 1}.$$

Solución:

Observamos que la diferencia de grados entre el numerador y denominador es 2-5 = -3. Por consiguiente, comparamos con la serie:

$$\sum \frac{1}{n^3} \quad ,$$

que es una p-serie convergente por ser $p = 3 > 1$.

Como

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{n^2 + n}{2n^5 - 1}}{\dfrac{1}{n^3}} = \frac{1}{2} < 1 \, .$$

Concluimos del segundo criterio de comparación que la serie dada es convergente.

Problema 9

Aplicar el criterio del cociente para estudiar la convergencia de la serie

$$\sum \frac{n3^{n+1}}{2^n} \, .$$

Solución:

Como

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{(n+1)\,3^{n+2}}{2^{n+1}}}{\dfrac{n3^{n+1}}{2^n}} = \frac{3}{2} > 1$$

deducimos del criterio del cociente que, la serie es divergente.

Problema 10

Usar el criterio más adecuado para decidir sobre la convergencia de la serie:

$$1 + 2/3 + 3/9 + 4/27 + ...$$

Solución:

En primer lugar, tenemos

$$x_n = n / 3^{n-1} ,$$

como el término general de esta serie es del tipo exponencial, aplicamos el criterio de la raíz:

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{3n}{3^n}} = \frac{1}{3} < 1 .$$

Dicho criterio asegura que la serie es convergente.

Problema 11

Aplicar el criterio de Leibnitz para determinar la convergencia de la serie

$$\Sigma (-1/3)^{n-1} \ n.$$

Solución:

El término general de la serie en estudio se puede también escribir en la forma:

$$\sum (-1)^{n-1} \frac{n}{3^{n-1}} .$$

Estudiamos la monotonía de la sucesión de término general

$$x_n = n/3^{n-1} .$$

Como $x_{n+1} = (n+1)/3^n$, la desigualdad

$$x_{n+1} \leq x_n$$

se satisface si

$$\frac{n+1}{3^n} \leq \frac{n}{3^{n-1}}$$

o si

$$n + 1 \leq 3n.$$

Pero esta última desigualdad es válida para $n \geq 1/2$, luego $x_{n+1} \leq x_n$ para todo n y la sucesión (x_n) es decreciente.

Por otro lado, podemos aplicar la regla de l'Hôpital a la función $f(x)= \frac{x}{3^{x-1}}$:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{3^{n-1}} = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{3^{x-1} \text{Ln } 3} = 0.$$

Aplicamos entonces, el criterio de Leibnitz o de las series alternadas y deducimos que la serie dada es convergente.

Problema 12

Demostrar que la sucesión de las sumas parciales de la serie

$$\sum x_n = \sum \text{sen} xn$$

está acotada por $\frac{1}{\left|\text{sen}\frac{x}{2}\right|}$ si $x \neq 2k\pi$ con $k \in \mathbf{Z}$.

Solución

Como

$$\cos\frac{(2k-1)x}{2} - \cos\frac{(2k+1)x}{2} = 2\text{sen}kx\text{sen}\frac{x}{2},$$

sumando desde $k = 1$ hasta $k = n$ resulta

$$(\text{sen}x + \text{sen}2x + \ldots + \text{sen}nx)\,\text{sen}\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{x}{2} - \cos\frac{(2n+1)x}{2}\right] =$$

$$= \text{sen}\frac{(n+1)x}{2}\text{sen}\frac{nx}{2},$$

de donde se deduce que para $x \neq 2k\pi$

$$\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x + \ldots + \operatorname{sen}nx = \frac{\operatorname{sen}\frac{(n+1)x}{2}\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}},$$

por tanto,

$$|\operatorname{sen}x + \operatorname{sen}2x + \ldots + \operatorname{sen}nx| \leq \frac{1}{\left|\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right|}$$

para todo n.

Problema 13

Estudiar la convergencia de la serie

$$\sum \frac{\operatorname{sen}\alpha n}{n}.$$

Solución:

Si $\alpha = 2k\pi$, $k \in Z$, es obvio que es una serie convergente al ser todos sus términos nulos. Para los restantes valores de α, se facilita el estudio de la serie considerando que es de la forma

$$\sum x_n y_n$$

con $x_n = \operatorname{sen}\alpha n$ e $y_n = \frac{1}{n}$.

Como se ha visto en la resolución del Problema 12, la sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum x_n = \sum \operatorname{sen}\alpha n$ está acotada.

Además la sucesión $\frac{1}{n}$ es monótona decreciente y con límite 0.

Por tanto, se puede aplicar el criterio de Dirichlet el cual asegura que la

serie $\sum \frac{\text{sen}\alpha n}{n}$ es convergente.

Problema 14

Usar el criterio más adecuado para discutir sobre la convergencia de la serie:

$$\sum \frac{n!}{(n+1)^n 2^n}.$$

Solución:

Parece aconsejable utilizar el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}2^{n+1}}}{\dfrac{n!}{(n+1)^n 2^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+2)^{n+1}2} =$$

$$= \frac{1}{2e} < 1 .$$

Por tanto, la serie en estudio es convergente.

Nota: Resuelvasé por el criterio de la raíz.

Problema 15

Analizar la convergencia de la serie

$$\sum \frac{2n+1}{n3^n},$$

por el criterio más adecuado.

Solución:

Se puede aplicar el criterio de Abel ya que la serie $\Sigma\,(1/3)^n$ es convergente (geométrica de razón menor que 1) y la sucesión $(\frac{2n+1}{n})$ es monótona

decreciente y al converger a 2 está acotada. Dicho criterio nos indica que la serie dada es convergente.

Problema 16

Determinar el carácter de la serie

$$\sum \frac{1}{2n^2+3}.$$

Solución

La convergencia de esta serie es análoga a la de la serie

$$\sum \frac{1}{n^2}$$

que es una p-serie convergente al ser $p = 2 > 1$.

Comparamos término a término con la serie $\sum \frac{1}{n^2}$ y resulta:

$$\frac{1}{2n^2+3} < \frac{1}{n^2} \quad \text{para todo n,}$$

y la serie dada está mayorada por la serie $\Sigma 1/n^2$.

Luego el criterio de comparación asegura que también ella es convergente.

Problema 17

Estudiar la convergencia de las series:

a) $\sum (-1)^n \frac{n^4}{n^4+1}.$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3Ln\,(n)}.$

Solución

a) La sucesión $x_n = \dfrac{(-1)^n n^4}{n^4+1}$ cumple que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^4}{n^4+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4}{n^4+1} = 1 \text{ para n par, luego } \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^4}{n^4+1} \neq 0.$$

El criterio del término n-ésimo indica que la serie no converge.

b) Por ser una serie del tipo: $\sum(-1)^n x_n$, usaremos el criterio de las series alternadas. En primer lugar, comprobamos si la sucesión de término general

$$x_n = \frac{1}{3Ln(n)}$$

es monótona decreciente.

En este caso

$$x_{n+1} = \frac{1}{3Ln(n+1)} \leq \frac{1}{3Ln(n)} = x_n$$

si y sólo si,

$$Ln(n) \leq Ln(n+1)$$

desigualdad válida para todo n pues la función logarítmica es una función creciente.(Utilícese por ejemplo el signo de la derivada de la función $f(x) = Ln(x)$).

Además, como

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{3Ln(n)} = 0$$

del criterio de las series alternadas se concluye que la serie dada es convergente.

Problema 18

Examinar si la serie dada converge y, en su caso, si lo hace absoluta o condicionalmente:

$$\sum \frac{\cos n}{n^3}.$$

Solución

Al ser

$$|\cos n| \leq 1 \text{ para todo } n,$$

comparamos término a término la serie dada con la p-serie $\sum \frac{1}{n^3}$, p-serie convergente al ser $p = 3 > 1$

$$\left|\frac{\cos n}{n^3}\right| \leq \frac{1}{n^3}, \text{ para todo } n.$$

Luego, por el primer criterio de comparación, la serie de los valores absolutos es convergente y la serie en estudio converge absolutamente.

Problema 19

Estudiar el carácter de la serie

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}.$$

Solución

La serie dada es una serie alternada. Utilizamos entonces el criterio de dichas series y comprobamos que se verifican las dos condiciones exigidas para la convergencia:

1) Sea $x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, vemos que

$$0 < x_{n+1} \leq x_n \text{ para todo } n,$$

si y sólo si

$$0 < \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \quad \text{para todo } n,$$

desigualdad verdadera obviamente.

2) $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$

El criterio de las series alternadas (también llamado de Leibnitz) nos indica que la serie es convergente.

Como no lo es absolutamente (pues las serie de los valores absolutos es una p-serie de p = 1/3 < 1 divergente) la serie dada es condicionalmente convergente.

Problema 20

Utilizar el criterio de la raíz para analizar la convergencia o divergencia de la serie:

$$\sum (\sqrt[n]{n} + 2)^n.$$

Solución

Como

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{(\sqrt[n]{n} + 2)^n} = \lim_{n \to \infty} (\sqrt[n]{n} + 2) = 3 > 1$$

el criterio de la raíz asegura que la serie diverge.

Problema 21

Estudiar la naturaleza de la serie:

$$\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\alpha}\right), \quad \alpha > 0.$$

Solución

Como

$$\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+\alpha}\right) = \sum \frac{\alpha}{n(n+\alpha)}$$

parece apropiado utilizar el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{\alpha}{(n+1)\,(n+1+\alpha)}}{\dfrac{\alpha}{n\,(n+\alpha)}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n\,(n+\alpha)}{(n+1)\,(n+1+\alpha)}=1.$$

Luego es un caso dudoso. Generalmente, en estas circunstancias, se usa el criterio de Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)=\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{n\,(n+\alpha)}{(n+1)\,(n+1+\alpha)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{2n+\alpha+1}{n^2+(\alpha+2)\,n+\alpha+1}\right)=2>1.$$

De dicho criterio deducimos que la serie es convergente.

Problema 22

Determinar el carácter de la serie:

$$\frac{2}{5}+\frac{2\cdot 3}{5\cdot 6}+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7}+\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}+\ldots.$$

Solución

El término general x_n de la serie es

$$x_n=\frac{2\,(2+1)\,(2+2)\ldots(2+n)}{5\,(5+1)\,(5+2)\ldots(5+n)}.$$

A la vista de dicho término, parece oportuno aplicar el criterio del cociente:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{2\,(2+1)\,(2+2)\ldots(2+n+1)}{5\,(5+1)\,(5+2)\ldots(5+n+1)}}{\dfrac{2\,(2+1)\,(2+2)\ldots(2+n)}{5\,(5+1)\,(5+2)\ldots(5+n)}}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2+n+1}{5+n+1} = 1 .$$

Como el criterio del cociente falla, aplicamos el de Raabe:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{2+n+1}{5+n+1}\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{3}{5+n+1}\right) = 3 > 1$$

es decir, la serie converge.

Problema 23

Probar que la serie:

$$\sum \frac{(-1)^n \mathrm{Ln}(n+1)}{n+1} ,$$

es convergente.

Solución

Sea $x_n = \dfrac{\mathrm{Ln}(n+1)}{n+1}$. Por la regla de l'Hôpital aplicada a la función $f(x) = \dfrac{\mathrm{Ln}(x+1)}{x+1}$, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = 0 .$$

A veces conviene usar la derivación para comprobar que $x_{n+1} \le x_n$.

Sea, en este caso, $f(n) = \dfrac{\mathrm{Ln}(n+1)}{n+1}$. Entonces

$$f'(n) = \frac{1-\mathrm{Ln}(n+1)}{(n+1)^2} \le 0 \text{ para todo } n \in \mathbf{N},\ n>1.$$

Por tanto, f es decreciente y en consecuencia $x_{n+1} \le x_n$ para todo $n \ge 2$.

Para concluir basta utilizar el criterio de las series alternadas o de Leibnitz.

Problema 24

Dadas las series:

a) $\sum \frac{3^n + (-2)^n}{6^n}$.

b) $\sum \frac{5^n + \sqrt{n}}{5^n \cdot \sqrt{n}}$.

Estudiar su convergencia.

Solución

a) La serie en estudio se puede descomponer como suma de series más sencillas:

$$\sum \frac{3^n + (-2)^n}{6^n} = \sum \frac{3^n}{6^n} + \sum \frac{(-2)^n}{6^n} = \sum (\frac{1}{2})^n + \sum (-\frac{1}{3})^n .$$

Las series de los valores absolutos $\sum \left| (\frac{1}{2})^n \right|$ y $\sum \left| (-\frac{1}{3})^n \right|$ son convergentes, por ser series geométricas de razón r con $|r|$ menor que 1, consecuentemente la serie dada, suma de ambas,es también absolutamente convergente.

b) Esta serie es divergente ya que

$$\sum \frac{5^n + \sqrt{n}}{5^n \cdot \sqrt{n}} = \sum (\frac{1}{5^n} + \frac{1}{\sqrt{n}}),$$

si fuese convergente, al serlo $\sum (\frac{1}{5})^n$, también lo sería $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ lo cúal es falso.

Problema 25

Dada la serie

$$\sum \frac{\alpha^n (n^2+1)}{3^n},$$

estudiar su carácter para todo $\alpha > 0$.

Solución

En primer lugar, tenemos que si α es mayor que 3, la serie sería

$$\sum (n^2+1) \leq \sum \frac{\alpha^n (n^2+1)}{3^n}$$

y es obviamente divergente, pues no cumple la condición necesaria de convergencia al ser

$$\lim_{n \to \infty} (n^2+1) = \infty \neq 0.$$

Como:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\dfrac{\alpha^{n+1}[(n+1)^2+1]}{3^{n+1}}}{\dfrac{\alpha^n (n^2+1)}{3^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\alpha (n^2+2n+2)}{3(n^2+1)} = \frac{\alpha}{3},$$

del criterio del cociente se deduce que si $0 < \alpha < 3$, la serie converge y en caso contrario diverge.

Problema 26

Estudiar, según los valores de α, la convergencia de la serie:

$$\sum \frac{\cos n\alpha}{e^{\alpha n}}.$$

Solución

Si $\alpha \leq 0$ la serie diverge pues

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\cos n\alpha}{e^{\alpha n}} \neq 0.$$

Si $\alpha > 0$, por el criterio de Dirichlet la serie converge pues la sucesión de término general $\frac{1}{e^{\alpha n}}$ es decreciente y nula, y la serie $\Sigma \cos n\alpha$ tiene la sucesión de sus sumas parciales acotada por un razonamiento análogo al del problema 12.

Tema 11

Métodos Numéricos del Análisis

Problema 1

Determinar un valor aproximado del número $\sqrt[7]{121}$.

Solución

Si se denomina por la letra a al número $\sqrt[7]{121}$, entonces a es un valor que verifica la ecuación

$$x^7 = 121,$$

que se puede reescribir de la siguiente forma

$$x = \frac{121}{x^6},$$

con lo cual se considera la función $g(x) = \frac{121}{x^6}$ y la ecuación se expresa como:

$$x = g(x).$$

La función $g'(x) = -6\frac{121}{x^7}$ no está acotada por uno, por tanto, no es una buena elección para proceder por el método de iteraciones sucesivas. Así pues, la ecuación conviene reescribirla de la forma:

$$x + \alpha x = \alpha x + \frac{121}{x^6},$$

donde α es un número real que se determina posteriormente. La ecuación se escribe ahora de la forma siguiente:

$$x = \frac{1}{1+\alpha}\left(\alpha x + \frac{121}{x^6}\right).$$

Si se considera la función

$$g(x) = \frac{1}{1+\alpha}\left(\alpha x + \frac{121}{x^6}\right),$$

se tiene que su derivada

$$g'(x) = \frac{1}{1+\alpha}\left(\alpha - 6\frac{121}{x^7}\right),$$

verifica que está acotada por

$$g'(x) = \frac{1}{1+\alpha}\left(\alpha - 6\frac{121}{x^7}\right) \leq \frac{1}{1+\alpha}\left(\alpha - 6\frac{121}{a^7}\right) = \frac{1}{1+\alpha}(\alpha - 6)$$

para todo $x > a$. Luego, basta tomar $\alpha = 7$ para obtener una acotación de g' por uno para los valores mayores que a. Así pues, se considera:

$x_0 = 11$ (número que acota al valor de a).

$$x_n = g(x_{n-1}) = \frac{1}{8}\left(7x_{n-1} + 6\frac{121}{x_{n-1}^7}\right), \text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

Tabla de valores aproximados

1	9.625051226008509
2	8.422033960238878
3	7.369534014147689
4	6.44890877088379
5	5.64405679635337
6	4.941357058581483
7	4.32992145975771
8	3.802452313927806
9	3.357169455686705
10	3.00091126075473
11	2.750056340569869

12	2.616095279644219
13	2.572173871712389
14	2.564012977830509
15	2.562904304944423
16	2.562764091638305
17	2.562746547588836
18	2.562744339369724
19	2.56274401650341

Valor aproximado 2.562744 con error menor que 10^{-6}.

Problema 2

Resolver aproximadamente la ecuación $x - \operatorname{tg} x = 0$, para valores de x contenidos en el intervalo $(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$.

Solución

Si se reescribe la ecuación de la forma $x = \operatorname{tg} x$ y se considera la función $g(x) = \operatorname{tg} x$, entonces no se puede asegurar la convergencia de la iteración sucesiva puesto que la función $g'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ no está acotada por uno. Así pues, es conveniente considerar otra forma de reescribir la ecuación, por ejemplo:

$$\frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} x = x.$$

La función $g(x) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} x$ tiene función derivada acotada por uno; $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, con lo cual se asegura la convergencia del proceso de iteración. Por tanto, se considera:

$$x_0 = \frac{\pi}{2}.$$

$$x_n = g(x_{n-1}) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arc\,tg} x_{n-1}, \text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

Tabla de valores aproximados

1	2.57468114864
2	2.77112817806
3	2.79527253853
4	2.79803313053
5	2.79834677927
6	2.79838151984
7	2.79838553327
8	2.79838598774
9	2.79838603921

Valor aproximado 2.798386 con error menor que 10^{-6}.

Problema 3

Determinar aproximadamente las raíces de la ecuación polinómica

$$x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0.$$

Solución

Al considerar la función polinómica $f(x) = x^3 + x^2 - 4x + 1$, se tiene la función derivada $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$, y ésta se anula en los puntos:

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{13}}{3} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{13}}{3}.$$

Además, se verifica que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad , \quad f(x_1) > 0 \quad , \quad 0 > f(x_2) \quad , \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \quad ,$$

por lo tanto, la ecuación posee una única raíz en el interior de los conjuntos $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) y (x_2, ∞).

Para determinar un valor aproximado de la raíz $\xi_1 \in (-\infty, x_1)$, primero se acota inferiormente esta raíz, por ejemplo, $\xi_1 \in (-3, x_1)$ puesto que $f(-3) < 0$.

Como la función es cóncava en el intervalo $(-3, x_1)$, entonces al emplear el método de Newton se toma:

$a_0 = -3,$

$$a_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f'(a_{n-1})}; \text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

Tabla de valores aproximados

1	−2.705882352941176
2	−2.652782254413363
3	−2.65109515440088
4	−2.651093455544367

Valor aproximado -2.651093 con error menor que 10^{-6}.

Para determinar un valor aproximado de la raíz $\xi_2 \in (x_1, x_2)$ se utiliza el método de la bisección, para ello se toma $a = \frac{-1-\sqrt{13}}{3}$ y $b = \frac{(-1)+\sqrt{13}}{3}$.

Tabla de valores aproximados

-1.535183787345886	.8685171008110046	-.3333333432674408
-.3333333432674408	.8685171008110046	.2675918787717819
.2675918787717819	.8685171008110046	.5680544897913933
.2675918787717819	.5680544897913933	.4178231842815876
.2675918787717819	.4178231842815876	.3427075315266848
.2675918787717819	.3427075315266848	.3051497051492333
.2675918787717819	.3051497051492333	.2863707919605076
.2675918787717819	.2863707919605076	.2675918787717819
.2675918787717819	.2769813353661448	.2722866070689634
.2722866070689634	.2769813353661448	.2746339712175541
.2722866070689634	.2746339712175541	.2734602891432587
.2734602891432587	.2746339712175541	.2740471301804064
.2734602891432587	.2740471301804064	.2737537096618325
.2737537096618325	.2740471301804064	.2739004199211195
.2737537096618325	.2739004199211195	.273827064791476
.273827064791476	.2739004199211195	.2738637423562977
.2738637423562977	.2739004199211195	.2738820811387086
.2738820811387086	.2739004199211195	.273891250529914
.2738820811387086	.273891250529914	.2738866658343113

.2738866658343113	.273891250529914	.2738889581821127
.2738889581821127	.273891250529914	.2738901043560134
.2738901043560134	.273891250529914	.2738906774429637
.2738901043560134	.2738906774429637	.2738903908994885
.2738903908994885	.2738906774429637	.2738905341712261
.2738905341712261	.2738906774429637	

Valor aproximado 0.273890 con error menor que 10^{-6}.

Para determinar un valor aproximado de la raíz $\xi_3 \in (x_2, \infty)$, primero se determina una cota superior de ésta. Por ejemplo, $\xi_3 \in (x_2, 2)$ puesto que $f(2) > 0$. Como la función es convexa en el intervalo $(x_2, 2)$, entonces al emplear el método de Newton se toma:

$b_0 = 2$,

$$b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f'(b_{n-1})}; \text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

Tabla de valores aproximados

1	1.583333333333333
2	1.412426403286366
3	1.378544882503935
4	1.377204789057773
5	1.377202869809004

Valor aproximado 1.377202 con error menor que 10^{-6}.

Problema 4

Determinar los puntos de corte de las gráficas de las funciones

$$f(x) = \text{sen } x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{x}$$

en el intervalo $(0, \frac{\pi}{2})$.

Solución

La función g(x) no está acotada en $(0, \frac{\pi}{2})$ mientras que la función f(x) si. Además, g es estrictamente decreciente y, en cambio, f es estrictamente creciente en dicho intervalo.

Inicialmente, se determina un intervalo donde las dos sean acotadas, por ejemplo, $[1, \frac{\pi}{2}]$. Se tiene

$$f(x) = \text{sen } 1 < g(x) = 1 \quad , \quad f(\frac{\pi}{2}) = 1 > g(x) = \frac{2}{\pi},$$

así pues, si se considera la función h(x) = f(x) - g(x) en $[1, \frac{\pi}{2}]$ que es una función continua y cumple que h(1) < 0 y $h(\frac{\pi}{2}) > 0$, se puede aplicar el teorema de Bolzano de funciones continuas y se tiene asegurada la existencia de un cero de la función h en dicho intervalo.

Aplicamos el método de la bisección; para ello se toma a = 1 y $b = \frac{\pi}{2}$.

Tabla de valores aproximados

1	1.570796489715576	1.285398244857788
1	.285398244857788	1.142699122428894
1	1.142699122428894	1.071349561214447
1.071349561214447	1.142699122428894	1.107024341821671
1.107024341821671	1.142699122428894	1.124861732125282
1.107024341821671	1.124861732125282	1.115943036973476
1.107024341821671	1.115943036973476	.111483689397573
1.111483689397573	1.115943036973476	1.113713363185525
1.113713363185525	1.115943036973476	1.114828200079501
1.113713363185525	1.114828200079501	1.114270781632513
1.113713363185525	1.114270781632513	1.113992072409019
1.113992072409019	1.114270781632513	1.114131427020766
1.114131427020766	1.114270781632513	1.114201104326639
1.114131427020766	1.114201104326639	1.114166265673703
1.114131427020766	1.114166265673703	1.114148846347234
1.114148846347234	1.114166265673703	1.114157556010468
1.114148846347234	1.114157556010468	1.114153201178851

1.114153201178851	1.114157556010468	1.11415537859466
1.11415537859466	1.114157556010468	1.114156467302564
1.114156467302564	1.114157556010468	1.114157011656516
1.114157011656516	1.114157556010468	1.114157283833492
1.114157011656516	1.114157283833492	1.114157147745004
1.114157011656516	1.114157147745004	

Valor aproximado 1.114157 con error menor que 10^{-6}.

Problema 5

Determinar el valor de x para el cual la función $f(x) = (2x)^x$ toma el valor 6.

Solución

Se trata de calcular un valor aproximado de la raíz de la ecuación

$$(2x)^x - 6 = 0,$$

para ello, se considera la función $g(x) = (2x)^x - 6$ cuya gráfica es convexa en todo $\mathbf{R}^+$.

Inicialmente, se determina un intervalo que contenga a la raíz buscada; por ejemplo, $\xi \in (1, 2)$, puesto que $g(1) < 0$ y $g(2) > 0$ y se puede aplicar el teorema de Bolzano de funciones continuas.

A continuación, se emplea el método de la secante para determinar un valor aproximado.

$$a_0 = 1 \quad y \quad b = 2,$$

$$a_n = a_{n-1} - \frac{g(a_{n-1})}{g(b) - g(a_{n-1})} \cdot (b - a_{n-1}), \text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

Tabla de valores aproximados

1	1.285714285714286
2	1.434544364337175
3	1.506763941903424
4	1.540298398132454
5	1.55551119140078
6	1.562335137968167
7	1.565380301818555
8	1.566735966672743

9	1.567338842589313
10	1.567606898634409
11	1.567725956045502
12	1.567778902899065
13	1.567802417524691
14	1.567812845319161
15	1.567817502742389
16	1.567819625362904
17	1.567820511503632
18	1.567820882445944
19	1.567820985485451
20	1.567821088524933

Valor aproximado 1.567821 con error menor que 10^{-6}.

Problema 6

Determinar los cortes con el eje OX de la gráfica de la función $f(x) = x^4-x-1$.

Solución

La gráfica de la función $g(x) = x^4 - x$ es de la misma forma que la gráfica de la función f; la gráfica de f es la gráfica de g trasladada una unidad en el sentido de los valores negativo del eje OY.

La gráfica de la función g tan sólo corta en dos puntos al eje OX:

$$x^4 - x = 0 \quad \rightarrow \quad x(x-1)(x^2+x+1) = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 0 \ \text{ y } \ x_2 = 1,$$

y, además, posee un único extremo local; un mínimo relativo en $x = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$,

$$g'(x) = 4x^3 - 1 \quad \rightarrow \quad 4x^3 - 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x^3 = \frac{1}{4}.$$

Así pues, la gráfica de la función f tiene la forma parecida a una parábola con el mínimo relativo situado en $x = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$. Tiene dos cortes con el eje OX:

$\xi_1 \in (-1, 0)$, puesto que $f(-1) > 0$,

$\xi_2 \in (1, 2)$, puesto que $f(2) > 0$.

La gráfica de la función f es convexa en el intervalo (-1, 0), así pues, al utilizar el método de la secante para determinar un valor aproximado, se elige:

$$a = -1 \quad y \quad b_0 = 0,$$

$$b_n = b_{n-1} - \frac{f(b_{n-1})}{f(b_{n-1}) - f(a)} \cdot (b_{n-1} - a), \text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

Listado de valores aproximados

1	-.5
2	.6
3	-.6153846100942622
4	-.6176470423703783
5	-.6179775229298397
6	-.6180257583598724
7	-.6180327787626407
8	-.618033827764323
9	-.6180339638262444

Valor aproximado -0.618033 con error menor que 10^{-6}.

La gráfica de la función f es convexa en el intervalo (1, 2), así pues, al utilizar el método de la secante para determinar un valor aproximado, se elige:

$$a_0 = 1 \quad y \quad b = 2,$$

$$a_n = a_{n-1} - \frac{f(a_{n-1})}{f(b) - f(a_{n-1})} \cdot (b - a_{n-1}), \text{ para todo } n \in \mathbf{N}.$$

Listado de valores aproximados

1	1.5
2	1.6
3	1.615384636546027
4	1.617647159223303
5	1.61797750644688
6	1.618025730363301
7	1.618032723752419
8	1.618033827983182

Valor aproximado 1.618033 con error menor que 10^{-6}.

Problema 7

Determinar una función polinómica de tercer grado cuya gráfica pasa por los puntos (-2,3), (0,-1), (3,-2) y (4,-3).

Solución

Se considera una función $f:[-2, 4]\to\mathbf{R}$ continua de la cual tan sólo se conoce que $f(-2) = 3$, $f(0) = -1$, $f(3) = -2$ y $f(4) = -3$. Si la función es polinómica, entonces existe una única función que cumple dichas condiciones, la función correspondiente al polinomio interpolador.

Para determinar al polinomio interpolador relativo a los nodos -2, 0, 3 y 4, utilizamos el método de Lagrange:

$$P_3(x)=\sum_{i=0}^{3} f(x_i)\left(\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{3}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}\right)$$

supuesto que $x_0=-2, x_1=0, x_2=3$ y $x_3=4$.

$$P_3(x) = 3\cdot\frac{x}{-2}\cdot\frac{x-3}{-5}\cdot\frac{x-4}{-6} - 1\cdot\frac{x+2}{2}\cdot\frac{x-3}{-3}\cdot\frac{x-4}{-4} -$$

$$-2\cdot\frac{x+2}{5}\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{x-4}{-1} - 3\cdot\frac{x+2}{6}\cdot\frac{x}{4}\cdot\frac{x-3}{1} =$$

$$=\frac{-1}{12}x^3+\frac{5}{12}x^2-\frac{5}{6}x-1.$$

Problema 8

Una determinada ley, formulada respecto a una cierta magnitud t, se expresa mediante una función polinómica de cuarto grado. Después de realizar distintas mediciones se obtuvo la tabla

valor t	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
valor L	731	309	103	23	5	1	-1	3	43	173	471

Determinar dicha ley.

Solución

Los valores que se consideran de la magnitud t están uniformemente espaciados.

Se trata de calcular el polinomio de grado cuarto que satisface dicha tabla de valores. Para determinar éste, se utiliza el método de Newton-Gregory en diferencias progresivas; en este caso:

$$P_4(t) = \sum_{k=0}^{4} \frac{\Delta^k f(t_0)}{k! \cdot h^k} \cdot \left(\prod_{i=0}^{k} (t - t_i) \right).$$

Tabla en diferencias progresivas

t	f(t)	$\Delta f(t)$	$\Delta^2 f(t)$	$\Delta^3 f(t)$	$\Delta^4 f(t)$
-5	731				
		-422			
-4	309		216		
		-206		-90	
-3	103		126		26
		-80		-64	
-2	23		62		16
		-18		-48	
-1	5		14		36
		-4		-12	
0	1		2		16
		-2		4	
1	-1		6		26
		4		30	
2	3		36		24
		40		54	
3	43		90		24
		130		78	
4	173		168		
		298			
5	471				

Como la ley se expresa según una función polinómica de cuarto grado, entonces las diferencias progresivas de orden cinco deben ser nulas, por tanto, se detecta que hay error en las mediciones efectuadas.

Al observar la forma en la cual se propagan los errores en la tabla en diferencias, se deduce que para $t = -1$ se tomó una medición errónea, tendría que haberse medido 3. Esto aconseja tomar los valores nodales

$t_0 = 0 \qquad t_1 = 1 \qquad t_2 = 2 \qquad t_3 = 3 \qquad t_4 = 4 \qquad t_5 = 5$

pues para ellos se tomaron bien las medidas. Como $h = 1$, entonces

$$P_4(t) = 1 - 2x + \frac{6}{2!}x(x-1) + \frac{30}{3!}x(x-1)(x-2) +$$

$$+ \frac{24}{4!}x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - x^3 - x^2 - x + 1.$$

Problema 9

Al basarse en el conocimiento de una ley de formación dependiente del tiempo en unos instantes determinados; $t = 1$, $t = 3$, $t = 7$ y $t = 10$, se conjeturó que dicha ley tenía la expresión:

$$f(t) = 3t^3 - 2t^2 - 4t + 2,$$

y se constrastó dicha ley para el instante $t = 11$, obteniéndose un valor de 8500 por medición. ¿Debe mantenerse como válida la mencionada expresión de la ley?. En caso contrario, conjeturar una expresión nueva.

Solución

La función $f(t) = 3t^3 - 2t^2 - 4t + 2$ toma los valores

$t = 1 \rightarrow f(1) = -1$

$t = 3 \rightarrow f(3) = 53$

$t = 7 \rightarrow f(7) = 905$

$t = 10 \rightarrow f(10) = 2762.$

El valor que toma esta función para $t = 11$ es 8709 que difiere del valor experimental, así pues, se construye el siguiente triángulo en diferencias divididas para hallar el polinomio interpolador de grado cuarto mediante la fórmula de Newton para nodos no uniformemente separados:

$$P_4(t) = f(t_0) + \sum_{k=1}^{4} \left(f[t_0, ..., t_k] \cdot \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i) \right)$$

donde

$$f[t_0, ...,t_k] = \frac{f[t_1, ...,t_k] - f[t_0, ...,t_{k-1}]}{t_k - t_0} \qquad \text{y} \quad f[t_k] = f(t_k).$$

	$f[t_k]$	$f[t_{k-1},t_k]$	$f[t_{k-2},t_{k-1},t_k]$		
$t_0=1$	-1				
		27			
$t_1=3$	53		31		
		213		3	
$t_2=7$	905		3		0
		619		3	
$t_3=10$	2762		82		
		4947			
$t_4=11$	8709				

$$P_4(t) = f(t) = -1 + 27(t-1) + 31(t-1)(t-3) +$$
$$+3(t-1)(t-3)(t-7) + 0(t-1)(t-3)(t-7)(t-10) =$$
$$= 3t^3 - 56t^2 + 536t - 1132.$$

Problema 10

Una calculadora muestra los siguientes valores de la función $f(x) = \log x$

$\log(1) = 0.0000$, $\log(1.01) = 0.0043$, $\log(1.02) = 0.0086$,
$\log(1.03) = 0.0128$, $\log(1.04) = 0.0170$, $\log(1.05) = 0.0212$,
$\log(1.06) = 0.0253$, $\log(1.07) = 0.0294$ $\log(1.08) = 0.0334$,
$\log(1.09) = 0.0374$ y $\log(1.10) = 0.0414$.

Interpretar la forma de calcular de dicha calculadora.

Solución

Si se construye la tabla de diferencias progresivas

x	f(x)	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$
1	0.0000		
		43.10^{-4}	
1.01	0.0043		0
		43.10^{-4}	
1.02	0.0086		-1.10^{-4}
		42.10^{-4}	
1.03	0.0128		0
		42.10^{-4}	
1.04	0.0170		0
		42.10^{-4}	
1.05	0.0212		-1.10^{-4}
		41.10^{-4}	
1.06	0.0253		0
		41.10^{-4}	
1.07	0.0294		-1.10^{-4}
		40.10^{-4}	
1.08	0.0334		0
		40.10^{-4}	
1.09	0.0374		0
		40.10^{-4}	
1.10	0.0414		

Aunque la función $f(x) = \log x$ es una función transcendente, para el intervalo [1, 1.10] se puede considerar una aproximación polinómica exacta de primer grado si tan sólo se consideran cuatro decimales. Así pues, la calculàdora utiliza el polinomio de interpolación de primer grado puesto que las primeras diferencias finitas son prácticamente iguales.

Las diferencias segundas son iguales y prácticamente nulas, salvo una diezmillonésima que se puede considerar una diferencia debida al redondeo.

Problema 11

Determinar la distancia entre nodos equidistantes de manera que se pueda utilizar el polinomio interpolador correspondiente a cinco nodos equidistantes para la función $f(x) = e^x$ en el intervalo [-4, 4], con un error menor que 10^{-10}.

Solución

Si se considera el polinomio interpolador $P_4(x)$ correspondiente a los nodos equidistantes x_0, x_1, x_2, x_3 y x_4, se tiene que para cualquier $x \in [x_0, x_4]$, existe un valor $\xi \in (x_0, x_4)$ tal que

$$f(x) = P_4(x) + \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \prod_{i=0}^{4} (x - x_i).$$

Por tanto, al tomar el valor de $P_4(x)$ en lugar de $f(x)$ se comete el error

$$E(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot \prod_{i=0}^{4} (x - x_i).$$

Al considerar el cambio de variable: $u = \dfrac{x - x_0}{h}$ donde h es la distancia entre dos nodos consecutivos, se obtiene la siguiente expresión del error:

$$E(x_0 + uh) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot h^5 \cdot u^{[5]},$$

donde u toma valores en el intervalo (0, 5).

Como la función f(x) es sucesivas veces derivable con derivadas continuas, se tiene que la derivada quinta está acotada por el valor máximo en el intervalo [-4, 4]. Además, $u^{[5]} \leq 5^{[5]} = 5!$, para todo $u \in [0, 5]$, entonces

$$E(x_0 + uh) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot h^5 \cdot u^{[5]} \leq \frac{e^4}{5!} h^5 \cdot 5! \leq 4^5 \cdot h^5.$$

Así pues, si se considera

$$4^5 \cdot h^5 \leq 10^{-10} \quad \text{entonces} \quad h \leq 0.0025.$$

Basta considerar cinco nodos uniformemente distanciados, por 0.0025, para asegurarse un error menor que 10^{-10}.

Problema 12

Determinar el error máximo que se comete al tomar el valor del polinomio interpolador de tercer grado correspondiente a cuatro nodos equidistantes en lugar del valor de la función $f(x) = \text{sen } x$ en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Solución

Considerados cuatro nodos equidistantes x_0, x_1, x_2 y x_3 distanciados uniformemente un valor h, es decir, $x_i - x_{i-1} = h$, se tiene que para cualquier $x \in [x_0, x_3]$, existe un $\xi \in (x_0, x_3)$ tal que

$$f(x) = P_3(x) + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!} \prod_{i=0}^{3} (x - x_i)$$

Como

$$\text{máx } \{f^{(4)}(x), x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\} = \text{máx } \{\text{sen}x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\} = 1 ,$$

entonces

$$E(x) \leq \frac{1}{4!} (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3).$$

La función $T(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ alcanza un máximo relativo en el punto $\frac{x_1 + x_2}{2}$, y al considerar el cambio de variable $x = x_0 + uh$, $u \in (0, 3)$

$$T(x_0 + uh) = h^4 \cdot u^{[4]}$$

y el valor máximo es $T(x_0 + \frac{3}{2}h) = \frac{9}{16}h^4$.

Luego, $E(x) \leq \frac{3}{16 \cdot 4!}h^4 = \frac{3}{128}h^4$.

Así pues, si se desea calcular sen 0.25 basta considerar los nodos $x_0 = 0$; $x_1 = 0.1$; $x_2 = 0.2$ y $x_3 = 0.3$ para obtener un error menor que $2.3\ 10^{-6}$.

Problema 13

Conocida de una función f la tabla de valores: f(-0.3)= 1.6081, f(-0.2)=1.4016, f(-0.1)= 1.2001, f(0)= 1, f(0.1)= 0.8001, f(0.2)= 0.6016 y f(0.3)= 0.4081.

Determinar un valor aproximado de f´(0.1) y estudiar el error cometido.

Solución

Si se considera un polinomio interpolador $P_n(x)$ para n+1 nodos equidistantes, se tiene que para cualquier nodo x_i, existe un $\xi \in (x_0, x_n)$ tal que

$$f'(x_i) = P'_n(x_i) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot W_n'(x_i) ,$$

donde $W_n(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - x_j)$.

Es necesario determinar un polinomio interpolador para los nodos $x_0 = -0.3$, $x_1 = -0.2$, $x_3 = -0.1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0.1$, $x_6 = 0.2$, $x_7 = 0.3$, para ello, se construye la tabla en diferencias progresivas siguiente:

x_0	$f(x_0)$	$\Delta f(x_0)$	$\Delta^2 f(x_0)$	$\Delta^3 f(x_0)$	$\Delta^4 f(x_0)$
-0.3	1.6081				
		-0.2065			
-0.2	1.4016		0.0050		
		-0.2015		-0.0036	
-0.1	1.2001		0.0014		0.0024
		-0.2001		-0.0012	
-0	1		0.0002		0.0024
		-0.1999		0.0012	
0.1	0.8001		0.0014		0.0024
		-0.1985		0.0036	
0.2	0.6016		0.0050		
		-0.1935			
0.3	0.4081				

$$P_4(x) = 1{,}6081 - \frac{0{,}2065}{0{,}1 \cdot 1!}(x+0{,}3) + \frac{0{,}005}{0{,}1^2 \cdot 2!}(x+0{,}3)(x+0{,}2) -$$

$$\frac{0{,}0036}{0{,}1^3 \cdot 3!}(x+0{,}3)(x+0{,}2)(x+0{,}1) +$$

$$\frac{0{,}0024}{0{,}1^4 \cdot 4!}(x+0{,}3)(x+0{,}2)(x+0{,}1)x =$$

$$x^4 - 2x + 1 .$$

Así pues,

$$P'_4(x) = 4x^3 - 2 ,$$

$$f'(0.1) = P'_4(0{,}1) = -\frac{499}{250} = -1{,}996 .$$

Dado que las diferencias cuartas son constantes, se puede conjeturar que la función es polinómica de cuarto grado, luego, no existe error.

Problema 14

Determinar un valor mínimo de la función f(x) conocida la tabla $f(0.60) = 0.6221$; $f(0.65) = 0.6155$; $f(0.70) = 0.6138$ y $f(0.75) = 0.6170$.

(La función desconocida es $f(x) = e^x - 2x$).

Solución

Se considera la tabla en diferencias siguiente:

x_0	$f(x_0)$	$\Delta f(x_0)$	$\Delta^2 f(x_0)$
0.60	0.6221		
		-0.0066	
0.65	0.6155		0.0049
		-0.0017	
0.70	0.6138		0.0049
		0.0032	
0.75	0.6170		

El polinomio interpolador correspondientes a la tabla es de grado dos;

$$P_2(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1! \cdot h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! \cdot h^2}(x - x_0)(x - x_1) ,$$

$$P_2(x) = 0.6221 + \frac{-0.0066}{0.05}(x - 0.6) + \frac{0.0049}{2 \cdot 0.05^2}(x - 0.6)(x - 0.65) ,$$

$$P_2(x) = \frac{49x^2}{50} - \frac{1357}{1000}x + \frac{2167}{2000} .$$

Se determinan los valores que anulan a $P_2'(x)$,

$$P_2'(x) = \frac{49}{25}x - \frac{1357}{1000} \quad \rightarrow \quad \frac{49}{25}x - \frac{1357}{1000} = 0,$$

$$x = \frac{1357}{1000} \cdot \frac{25}{49} = \frac{1357}{1960} \cong 0.692346 .$$

Así pues, se considera que la función f posee un mínimo en el punto "a" del cual es un valor aproximado 0.692346.

Puede observarse la bondad de la aproximación obtenida, pues el mínimo de la función $f(x) = e^x - 2x$ se alcanza en el punto $x = Ln2 \cong 0, 693124$.

Problema 15

Calcular $\int_1^2 xLnxdx$ mediante el cálculo de una función primitiva y por el método de los trapecios. Comparar los dos resultados.

Solución

Inicialmente se determina una función primitiva, para ello, la integral indefinida se integra por partes;

$$\int xLnxdx = \frac{1}{2}x^2Lnx - \int \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\left(Lnx - \frac{1}{2}\right),$$

donde se considera $U = Lnx$ y $dV = x\,dx$, y por tanto, $dU = \frac{1}{x}dx$ y $V = \frac{1}{2}x^2$. Así pues, la integral definida es:

$$\int_1^2 xLnxdx = \frac{1}{2}x^2\left(Lnx - \frac{1}{2}\right)\Big|_1^2 = 2Ln2 - \frac{3}{4} \cong 0.636294.$$

Si se consideran n+1 nodos equidistantes tal que $x_0 = 1$ y $x_n = 2$, entonces la fórmula del trapecio se expresa:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}\left(f(x_{i-1}) + f(x_i)\right) =$$

$$= \frac{h}{2}\left(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right)$$

En este caso se considera n = 10, es decir 11 nodos, luego

$$\int_1^2 xLnxdx = \frac{0.1}{2}\left(f(1) + 2f(1.1) + 2f(1.2) + \ldots + 2f(1.9) + f(2)\right),$$

es decir,

$$\int_1^2 xLnxdx \cong 0.636871.$$

Problema 16

Determinar un valor aproximado de las integrales:

$$a)\ \int_{-2}^{4} e^{x^2}dx \qquad b)\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\ x^2 dx.$$

Solución

No se conoce método alguno para determinar una función primitiva de las funciones $f(x) = e^{x^2}$ y $g(x) = senx^2$, así pues, se aplican métodos numéricos.

Para la primera integral se utiliza el método de los trapecios para n = 20 y n = 40 (21 y 41 puntos nodales).

Para n = 20:

$$\int_{-2}^{4} e^{x^2}dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) =$$

$$= \frac{6}{40}(f(-2) + \ldots + f(4)) \cong 1{,}163444 \cdot 10^6 \ .$$

Para n = 40:

$$\int_{-2}^{4} e^{x^2}dx = \frac{6}{80}(f(-2) + \ldots + f(4)) \cong 1{,}27934 \cdot 10^6 \ .$$

En el cálculo de la segunda integral se utiliza el método de Simpson para n = 10 (21 puntos nodales).

Para n = 10:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } x^2dx = \sum_{i=0}^{n} \frac{h}{3}(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})) =$$

$$= \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 4f(x_{2i-1}) + 2(4)f(x_{2i}) + \ldots) \ ,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen } x^2dx \cong 0'828038334 \, .$$

Problema 17

Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx$ mediante el cálculo de una función primitiva, y con los métodos numéricos del trapecio y de Simpson.

Solución

Una primitiva de la función $f(x) = \cos^2 x$ es

$$\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{4}\text{sen}2x + \frac{x}{2} \ ,$$

así pues,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{1}{4}\text{sen}2x + \frac{x}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \cong 0.642570.$$

Al aplicar el método de los trapecios para n = 20 (21 puntos nodales) se obtiene:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{160}\left(f(0) + \ldots + f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \cong 0.642570.$$

Al aplicar el método de Simpson para n = 10 (21 puntos nodales) se obtiene:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{240}\left(f(0) + \ldots + f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \cong 0.642699\,.$$

Problema 18

Calcular $\int_0^1 f(x)\,\text{Ln}x dx$ si la función f es conocida únicamente en los puntos $f(0) = 1$, $f(\frac{1}{3}) = 2$, $f(\frac{2}{3}) = 4$ y $f(1) = 8$.

Solución

Si se intenta aplicar la regla del trapecio a la función g(x) = f(x)Lnx en el intervalo [0, 1] al considerar los nodos $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{2}{3}$ y $x_3 = 1$ se tiene

$$\int_0^1 f(x)\,\text{Ln}x dx = \frac{1}{6}\left(g(x_0) + 2g(x_1) + 2g(x_2) + g(x_3)\right),$$

que tiene el grave problema de no estar g definida en x_0. Ahora bien, se puede considerar la función

$$G(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to 0} f(x)\,\text{Ln}x & \text{si} \quad x = 0 \\ f(x)\,\text{Ln}x & \text{si} \quad 0 < x < 1 \end{cases},$$

y se tiene

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{Ln}x\,dx = \int_0^1 G(x)\,dx = \frac{1}{6}\left(G(x_0) + 2G(x_1) + 2G(x_2) + G(x_3)\right).$$

Esta última expresión tiene la desventaja de no conocer $G(x_0)$.

Conviene pues sustituir f(x) por su polinomio de interpolación de tercer grado relativo a los nodos x_0, x_1, x_2, x_3;

$$P_3(x) = f(x_0) + \frac{\Delta f(x_0)}{1!\cdot h}(x - x_0) + \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2!\cdot h^2}(x - x_0)(x - x_1) +$$

$$+\frac{\Delta^3 f(x_0)}{3!\cdot h^3}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

La tabla en diferencias progresivas correspondiente es:

$x_0=0$	1			
		1		
$x_1=\frac{1}{3}$	2		1	
		2		1
$x_2=\frac{2}{3}$	4		2	
		4		
$x_3=1$	8			

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{1!\frac{1}{3}}x + \frac{1}{2!\left(\frac{1}{3}\right)^2}x\left(x - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3!\left(\frac{1}{3}\right)^3}x\left(x - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= \frac{9}{2}x^3 + \frac{5}{2}x + 1.$$

Se puede considerar la siguiente aproximación:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{Ln}x\,dx \cong \int_3^1 P_3(x)\,\mathrm{L}\,x\,dx = \int_0^1 \left(\frac{9}{2}x^3 + \frac{5}{2}x + 1\right)\mathrm{Ln}x\,dx,$$

y al aplicar el método de Simpson para n = 10 (21 puntos nodales) a la última integral:

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{Ln}x\,dx \cong -1.90612$$

Problema 19

Estimar el error de truncamiento de la fórmula del trapecio.

Solución

Si se consideran los nodos x_0 y x_1, entonces para cada $x \in [x_0, x_1]$ existe un $\xi_x \in (x_0, x_1)$ tal que

$$f(x) = P_1(x) + \frac{f''(\xi_x)}{2!}(x - x_0)(x - x_1).$$

Así pues, el error que se produce es

$$\int_{x_0}^{x_1} |f(x) - P_1(x)|\,dx = \int_{x_2}^{x_1} \left|\frac{f''(\xi_x)}{2!}\right| |(x - x_0)(x - x_1)|\,dx.$$

Como $(x\text{-}x_0)(x\text{-}x_1)$ tiene signo constante, negativo, en el intervalo (x_0, x_1), si se supone que la función f tiene derivada segunda continua se tiene:

$$\int_{x_0}^{x_1} |f(x) - P_1(x)|\,dx \le \frac{M}{2} \cdot \int_{x_2}^{x_1} |(x - x_0)(x - x_1)|\,dx,$$

donde $M = \text{máx}\{f''(x);\ x \in [x_0, x_1]\}$.

Al hacer el cambio de variable $\frac{x - x_0}{h} = u$, donde $h = x_1 - x_0$ se tiene

$$\int_{x_2}^{x_1} (x - x_0)(x - x_1)\,dx = \int_0^1 huh\,(u - 1)\,h\,du =$$

$$= h^3 \cdot \int_0^1 (u^2 - u)\,du = -\frac{h^3}{6}.$$

Luego,

$$\int_{x_0}^{x_1} |f(x) - P_1(x)|\,dx \le \frac{M}{12}h^3 = \frac{M}{12}(x_1 - x_0)^3$$

y, en general

$$\int_{x_0}^{x_n} |f(x) - P_1(x)|\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f(x) - P_1(x)|\,dx \le \frac{M}{2}h^3 n$$

donde $M = \text{máx}\{f''(x);\ x \in [x_0, x_1]\}$.

Problema 20

Estimar el error de truncamiento de la fórmula de Simpson.

Solución

Si se consideran tres nodos equidistantes x_0, x_1, x_2, con $h = x_i - x_{i-1}$ para $i=1,2$, entonces para cada $x \in [x_0, x_1]$ existe $\xi_x \in (x_1, x_2)$ tal que

$$f(x) = P_2(x) + \frac{f^{(3)}(\xi_x)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2).$$

El error de truncamiento de la fórmula de Simpson es

$$\int_{x_0}^{x_2} |f(x) - P_2(x)|\,dx \le \frac{M}{3!}\int_{x_0}^{x_2} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|\,dx,$$

donde $M = \text{máx}\{f^{(3)}(x);\ x \in [x_0, x_1]\}$, puesto que la función f tiene derivada tercera continua.

Como la función $(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$ es positiva en el intervalo (x_0, x_1) y negativa en (x_1, x_2):

$$\int_{x_0}^{x_2} |(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)|\,dx =$$

$$\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} (x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,dx.$$

Al considerar el cambio de variable $\frac{x - x_0}{h} = u$ se tiene

$$\int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,dx =$$

$$= \int_0^1 huh\,(u - 1)\,h\,(u - 2)\,hdu =$$

$$= h^4 \int_0^1 (u^3 - 3u^2 + 2u)\,du = \frac{1}{3}h^4.$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,dx =$$

$$= h^4 \cdot \int_1^2 (u^3 - 3u^2 + 2u)\,du = (-\frac{5}{3})\,h^4.$$

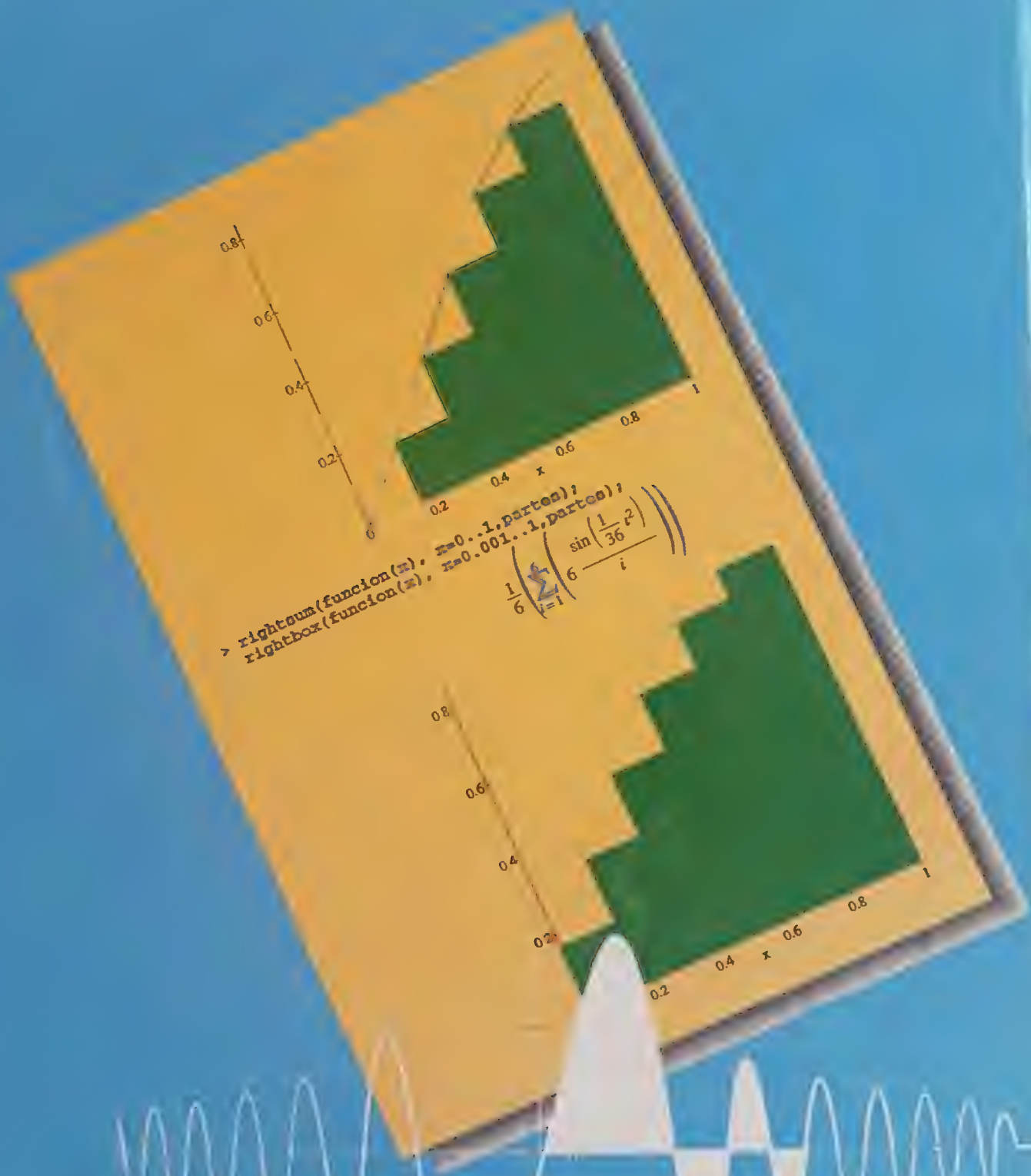
Luego,

$$\int_{x_1}^{x_2} |f(x) - P_2(x)|\,dx \leq \frac{M}{3}h^4$$

y, en general,

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} |f(x) - P_2(x)|\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{2i-1}}^{x_{2i}} |f(x) - P_2(x)|\,dx \leq \frac{M'}{3}h^4 n$$

donde $M' = \max\{f^{(3)}(x);\ x \in [x_0, x_{2n}]\}$.




```
> rightsum(funcion(x), x=0..1,partes);
  rightbox(funcion(x), x=0.001..1,partes);
```

$$\frac{1}{6}\left(\sum_{i=1}^{6}\left(6\,\frac{\sin\left(\frac{1}{36}i^2\right)}{i}\right)\right)$$

ISBN 84-88667-48-5

9 788488 667489

ISBN: 84-88667-48

JAR'23

JAR'23

BAR LIBA
FUNDADO EN 1938
CAFE - BAR LIBA
JAR'23

JAR'23

CORREOS
JAR'23

JAR'23

JAR'23

EDIFICIO
EN VENTA
JAR'23

JAR'23

JAR'23

JAR'23

JAR'23